

Lite kombinatorik

F2 ①

Antag att vi har n objekt. På hur många sätt kan vi rada upp dessa?

- i) Det 1:a objektet kan väljas på n olika sätt.
- ii) " 2:a " " " " " " " " " "
- ...

Totalt: $n(n-1)(n-2)\dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Ex: En klass om 20 personer ställer sig i mathön. På hur många sätt kan detta ske?

L: $20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \approx 24.33 \cdot 10^{17}$

Antag återigen att vi har n objekt. Vi vill välja ut k av dessa. På hur många sätt kan vi göra det?

Lite svårare.... Svaret är $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

"n över k"
"n choose k"

Tal: Kalle har 5 olika öl. På hur många sätt kan han välja 2 av dessa?

L: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(3 \cdot 2 \cdot 1)} = 10$

Tal: Hur många pokerhänder finns det?

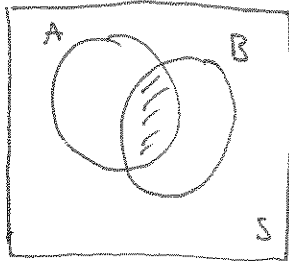
L: $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} \approx 2598960$

Tre räkne regler för sannolikheter

F2 (2)

1/ Kom ihåg: Om A, B disjunkta $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Om A, B ej disjunkta?



Betrakta $P(A) + P(B)$.

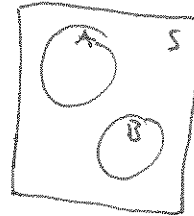
Det området $A \cap B$ är med i båda termerna.

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

OBS: Om A, B disjunkta

$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset \text{ g } P(A \cap B) = 0.$$

$$2/ P(A^c) = 1 - P(A)$$



3/ divisionsregeln.

Om alla utfall i S är lika sannolika

$$\text{gäller att } P(A) = \frac{\# \text{ utfall i } A}{\# \text{ utfall totalt}} = \frac{|A|}{|S|} \quad // \text{slut F2 2016}$$

Tal: Jenny drar 2 kort ur en kortlek.

Låt H vara händelsen att hon får minst 1 hjärta
" S " " " " " " " " spaden.

a) Beräkna $P(H)$
~~förre gången~~ divisionsregeln! (2)

$$\underline{1}: P(H) = 1 - P(H^c) = 1 - \frac{\# H^c}{\# \text{ totalt}} = 1 - \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} //$$

b) Beräkna sann. att Jenny får ~~2~~ en hj. ~~spaden~~
och en sp.

2: Vi söker $P(H \cap S)$.

F2 (3)

$$\begin{aligned} \text{Vi har } P(H \cup S) &= P(H) + P(S) - P(H \cap S) \\ &= 2P(H) - P(H \cap S) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(H \cap S) = 2P(H) - P(H \cup S)$$

$$\stackrel{2/}{=} 2P(H) - (1 - P((H \cup S)^c))$$

$$\stackrel{3/}{=} 2P(H) - \left(1 - \frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}}\right)$$

$$= 2 - 2 \cdot \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} - 1 + \frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\binom{52}{2} - 2\binom{39}{2} + \binom{26}{2}}{\binom{52}{2}}$$

Betingade sannolikheter

Tal:

~~Ex:~~ På en vägsträcka är högsta tillåtna hastighet 70 km/h. Vid en mätning fann man att 40 % av alla bilar körde > 70 km/h och att 12 % " " " " > 90 km/h.

Vad är sann. att en fortkörare kör > 90 km/h?

Intuitivt: $\frac{0.12}{0.4} = 0.3$ dvs 30 %.

Formellt. ^{Def:} Den betingade sannolikheten för A givet B betecknas $P(A|B)$ och ges

$$\text{av } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

1: Låt $A = \text{vald bil kör } > 90$
 $B = \text{" " " } > 70$

F2 (4)

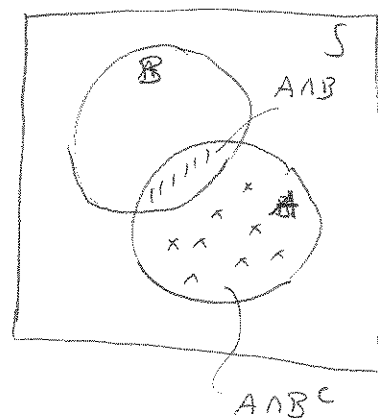
$\Rightarrow A \cap B = A$ och vi får

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.3$$

Till nästa tal behöver vi två saker till:

1/

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$



2/

$$P(A|B) = 1 - P(A^c|B)$$

B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A^c \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A^c|B) \quad \square$$

OBS: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ //

Tal: I en population har 0.1% en viss typ av cancer. Ett diagnostiskt verktyg upptäcker cancer med sann. 0.95 hos en drabbad individ och ~~miss~~diagnosticerar en frisk individ ^{som ej drabbad} med sann. 0.98.

Vad är sann. att en slumpmässigt vald

individ får positiv diagnos?

F2 5

L: Låt $P = \{ \text{vald individ får pos. diagnos} \}$
och $S = \{ \text{" " " är drabbad} \}$

Vi vet: $P(S) = 0.001$ $P(P|S) = 0.95$ $P(P^c|S^c) = 0.98$

Efterfrågas: $P(P)$

$$\begin{aligned} \text{Vi har: } P(P) &= P(P \cap S) + P(P \cap S^c) \\ &= P(P|S)P(S) + P(P|S^c)P(S^c) \\ &= 0.95 \cdot 0.001 + (1 - P(P^c|S^c))(1 - P(S)) \\ &= 0.00095 + 0.02 \cdot 0.999 \quad \cancel{= 0.00095 + 0.00002} \\ &= 0.00095 + 0.01998 = 0.02093 \end{aligned}$$

ca. 2.093 % sannolikhet. //

Tal:

(Naturlig fråga:) Givet en positiv diagnos,
vad är sannolikheten att du är sjuk?

Dvs, vad är $P(S|P) = ?$

Observera att vi känner $P(P|S)$!

$$\text{Vi har } P(S|P) = \frac{P(S \cap P)}{P(P)} = \frac{P(P|S)P(S)}{P(P)}$$

$$\text{L: } P(S|P) = \frac{\overset{\text{ohänd}}{P(P|S)}}{\underset{\text{alla tre händer!}}{P(P)}} P(S) = \frac{0.95}{0.02093} \cdot 0.001$$

≈ 0.04539 dvs ca 4.54 % !!! //

Bayes las:

F2 (6)

$$P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$