Kom ihåg: $\mathbb{P}(A \cap B) =$ "sann A & B inträffar" $\boxed{F3}$ 1

$\mathbb{P}(A|B) =$ "sann. A inträffar givet B har inträffat"

Vi har $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ och

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Oberoende: Händelserna A, B är oberoende om

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{och} \quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Tal: Singla två slantar. Låt

$A = \{$1:a singling ger $H\} = \{HH, HT\}$

$B = \{$2:a " " $H\} = \{HH, TH\}$.

A, B är intuitivt oberoende.

Vi får:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(HH)}{\mathbb{P}(HH, TH)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A).$$

p.s.s. $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

Dvs A, B är oberoende enl. def! //

~~Tal: Kasta en tärning~~

Om A, B ober. gäller att

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

Dvs oberoende är ekvivalent med att

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

Så länge $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$.

Tal: Kasta en tärning. Låt $A = \{\text{result.} \leq 4\}$ och $B = \{\text{result. är udda}\}$. Är A, B oberoende?

L: $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ och $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$

$A \cap B = \{\text{result. är 1 eller 3}\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Dvs $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ //

Ja, de är oberoende!

Slumpvariabler (s.v.)

Vi kommer betrakta diskreta och kontinuerliga s.v. (X, x)

En diskret s.v. antar uppräkneligt antal värden. D.v.s. alla värden kan skrivas upp i en lista. ($\{a,b\}$, {grön, blå, röd}, $\{1,2,3,\ldots\}$)

En kontinuerlig s.v. kan anta ett kontinuerligt antal värden (såsom ett intervall eller $(0,\infty)$ etc).

I allmänhet tilldelar en s.v. ett numeriskt värde till varje utfall av experimentet.

Ex 1: Två tärningar kastas. Resultatet representeras av (a,b) där a = 1:a kastet b = 2:a kastet

Dvs $S = \{(1,1), (1,2), (2,1), \ldots\}$

Låt $X(a,b) = a+b$ dvs summan av tärningsslagen. X kan anta värdena $\{2,3,\dots,12\}$.

Här är X diskret.

Ex2: Hanna står i kön på ICA. Låt

T = tiden tills hon kommer fram.

T kan anta värdena 0, 2.3, 20004, π, e etc.

I princip vilka positiva värden som helst. ($[0,\infty)$)

T är kontinuerlig

Ex3: Emil kastar vattenballonger på bilar som kör på gatan. Låt X = # försök innan första träffen. X kan anta värdena 1, 2, 3, ...

men ej 1.5, π etc.

X är diskret.

OBS: Stora bokstäver är s.v.

små bokstäver är data/resultat/utfall.

(boken fuskar)

Ex1: Dvs $\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36}$$

$$\vdots$$

alt

$$\mathbb{P}(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{36} & k=2 \\ \frac{2}{36} & k=3 \\ \vdots & \end{cases}$$

Diskreta slumpvariabler

En diskret s.v. X bestäms genom att vi

1/ specificerar vilka värden X kan anta

2/ beskriver vad de motsvarande sann. är.

Ex1: X kan anta värdena $\{2, 3, \ldots, 12\}$. Sannolikheterna

blir

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{36} & k = 2 \\ \frac{2}{36} & k = 3 \\ \frac{3}{36} & k = 4 \\ \frac{4}{36} & k = 5 \\ \vdots & \end{cases}$$

Sannolikhetsfunktionen (slf) för X är en graf/tabell/formel som anger alla sannolikheter för alla värden som X kan anta.

F3 2016

Ibland skrivs $p(x)$ istället för $\mathbb{P}(X = x)$

$p(k)$ $\mathbb{P}(X = k)$

En slf uppfyller alltid

1. $\mathbb{P}(X = x) \geq 0$

2. $\sum \mathbb{P}(X = x) = 1$.

OBS!! $\sum \mathbb{P}(X = x)$ indikerar en summa över alla värden på x.

Ex1: Villkor 1) är uppfyllt.

Villkor 2) : $\sum \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(X=k)$

$= \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \dots + \frac{1}{36}\right) = 1$

övning!

Väntevärde & Varians

Def: Väntevärdet av en diskret s.v. betecknas $\mathbb{E}[X]$ och definieras av $\mathbb{E}[X] = \sum x \, \mathbb{P}(X=x)$

alla värden!

Def: $\mathbb{E}[f(X)] = \sum f(x) \, \mathbb{P}(X=x)$ för alla funktioner $f(X)$

Tal: Låt X vara resultatet av ett tärningsslag. Beräkna $\mathbb{E}[X]$.

L: Vi har att $X \in \{1, 2, \dots, 6\}$ och med slf

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6} \quad k = 1, \dots, 6.$$ Vi får

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} k \, \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6}(1+2+\dots+6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

OBS: 1) Beräkning av väntevärde kräver kunskap om slf.

2) Väntevärdet kan vara ett tal som aldrig X kan anta (3.5).