<u>Variansen</u> av en (diskret) s.v. X ges av $\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathrm{Var}(X)$.

Variansen är ett mått på spridning.

<u>Tal:</u> Låt $X \in \{-1,0,1\}$ med s.t $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{3}$ $k \in \{-1,0,1\}$

och $Y \in \{-100,0,100\}$ " " " $k \in \{-100,0,100\}$.

Bestäm $\mathrm{Var}(X)$ och $\mathrm{Var}(Y)$ $\mathbb{E}[X]$ o $\mathbb{E}[Y]$.

<u>L:</u> Vi har att

$$\mathbb{E}[X] = \sum_k k\,\mathbb{P}(X=k) = -1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = 0$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_l l\,\mathbb{P}(Y=l) = -100\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 100\cdot\frac{1}{3} = 0$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] = \sum k^2\,\mathbb{P}(X=k)$$

$$= (-1)^2\cdot\frac{1}{3} + 0^2\cdot\frac{1}{3} + 1^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])^2\right] = (-100)^2\cdot\frac{1}{3} + 0^2\cdot\frac{1}{3} + 100^2\cdot\frac{1}{3}$$

$$= \frac{20000}{3} \quad //$$

Y har större spridning än X. Detta reflekteras i varianserna.

Ofta används notationen $\mu = \mathbb{E}[X]$

$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$

Observera att $\mathrm{Var}(X)$ är ett kvadratiskt uttryck. Ofta är $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ ett mer naturligt val. σ kallas för standardavvikelsen.

Fördelningen av en s.v. bestäms av dess slf. Vissa fördelningar förekommer särskilt ofta.

Vi kommer speciellt ta upp 3 av dessa

1) likformig förd. 2) binomialförd. 3) poissonförd.

Likformig fördelning

"likformig" = "lika mkt överallt"

Def: X är likformigt fördelad på mängden A om $$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\#\text{element i } A}$$ för varje $x \in A$.

Ex1: Vi kastar en tärning och X = resultatet.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6} \quad k = \{1, \ldots, 6\}.$$

X är likformigt fördelad på mängden $(A =) \{1, \ldots, 6\}$

Ex2: Vi kastar 2 tärningar och X = result.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{36} & k=2\\ \frac{2}{36} & k=3\\ \frac{3}{36} & k=4\\ \vdots & \end{cases}$$

X är ej likformigt fördelad på $A=\{2,3,\dots,12\}$.

Ex3: Som i ex1 med $Y=X^2$.

$Y \in \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\} = \{1,4,9,16,25,36\}$.

Vi har att $\mathbb{P}(Y=k)=\frac{1}{6}$ $k\in\{1,4,9,16,25,36\}$,

så Y är likformigt fördelad på $A=\{1,4,\dots,36\}$.

Binomialfördelningen

Uppkommer i följande situation:

1) Ett experiment består av n oberoende försök.

2) Varje försök kan antingen lyckas eller misslyckas, (2 utfall).

3) Sann. att lyckas är samma i alla försök.

4) Om X = # lyckade försök. så kommer X vara binomialförd. med parametrar n, p.

<u>Ex:</u> Ett försäkringsbolag försäkrar hus.

Hus brinner ner oberoende av varandra.

Låt X = # nedbrunna hus. Då är $X \sim Bin(n, p)$

där n = # försäkrade hus & p = sann. ett givet hus brinner.

<u>Ex:</u> Inför ~~Brexit-omröstningen~~ USA-valet tillfrågas

folk om de tycker Trump är bra eller dålig.

Låt X = # tillfr. som tycker Trump är kass.

$\Rightarrow$ $X \sim Bin(n, p)$ där n = # tillfrågade, p = sann. kass.

" F-bol. och medier behöver bin-förd."

Vi vill ta fram slf för X.

1) Vilka värden kan X anta? $X = 0, 1, 2, \ldots, n$.

2) Vad är $\mathbb{P}(X = k)$? för $k = 0, 1, \ldots, n$.

<u>Jo:</u> Betrakta ~~ett~~ en fix sekvens av <u>k lyckade försök.</u>

Förs. #	1	2	3	4		n−2	n−1	n
l/m	l	m	m	l		l	l	m ← k lyck. n−k m.
sann.	p	$1-p$	$1-p$	p		p	p	$1-p$

Sann. att se sekv. ovan med exakt k lyckade

är $p(1-p)(1-p) \cdot p \cdots p \cdot p \cdot (1-p) = p^k (1-p)^{n-k}$.

Det finns många sekvenser med k lyck. och n-k missl. Hur många? (alla ~~...~~ ingår i $\mathbb{X}=k$).

Vi har n "platser" och skall välja k av dessa som lyckade. Dvs k väljs av n

$$\Rightarrow \binom{n}{k}$$

Vi får att

$$\mathbb{P}(\mathbb{X}=k) = (\#\text{ sekv. med } k \text{ lyck.}) \cdot \text{sann. för sådan sekv.}$$
$$= \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\dots,n.$$

<u>Def:</u> $\mathbb{X}$ är binomialfördelad med parametrar n och p ($\mathbb{X} \sim Bin(n,p)$) om

$$\mathbb{P}(\mathbb{X}=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k=0,\dots,n.$$

Naturlig fråga: Om $\mathbb{X} \sim Bin(n,p)$, vad är $\mathbb{E}[\mathbb{X}]$ och $Var(\mathbb{X})$? Vi har

$$\mathbb{E}[\mathbb{X}] = \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}(\mathbb{X}=k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(jobbigt)

Om $n=1 \Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{X}] = 0 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{X}=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{X}=1)$

$= 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

Om $n=2 \Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{X}] = 0 \cdot \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 + 1 \cdot \binom{2}{1} p(1-p) + 2 \cdot \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0$

$= 0 + 2p(1-p) + 2p^2 = 2p$

Om $n=3 \Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{X}] = \dots = 3p$

I allmänhet $\boxed{\mathbb{E}[X] = np.}$

Rimligt? Ja! $np = (\#\text{ försök}) \cdot (\text{sann lyckas})$.

Tänk: Singla slant 1000 ggr låt $X = \# H$. Då är

$X \sim \mathrm{Bin}(1000, \frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbb{E}[X] = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500.$

Vad är variansen?

$n=1$: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[(X-p)^2]$

$= (0-p)^2 \cdot \mathbb{P}(X=0) + (1-p)^2 \mathbb{P}(X=1) = +p^2(1-p) + (1-p)^2 \cdot p$

$= p^2 - p^3 + (1+p^2-2p)p = p - p^2 = p(1-p)$

$n=2$: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X-2p)^2] = \dots = 2p(1-p)$

n: $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

OBS: 1) ofta används $q = 1-p$ dvs $\mathrm{Var}(X) = npq$

2) Räkningar ger $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

högerledet är ibland enklare att räkna på.