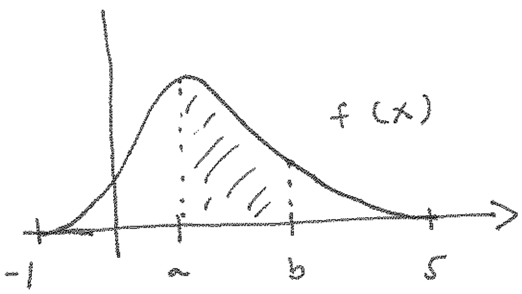
Kontinuerliga slumpvariabler

Kom ihåg: En diskret s.v. X har en slf som gör att vi kan räkna ut saker som $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{P}(-5 \le X \le \frac{7}{2})$ e.t.c.

Motsvarigheten för en kont. s.v. är dess (sannolikhets-) täthetsfunktion (tfk) (probability density function pdf), som betecknas $f(x)$ (alt $f_X(x)$, $f_Y(y)$ etc).

Ex:



$\mathbb{P}(a < X < b) =$ "arean under grafen mellan a, b"

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

OBS: För en kont. s.v. gäller alltid att $\mathbb{P}(X = a) = 0$ för alla a. Arean över en enda punkt är noll!!

Därför gäller att $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \le X \le b)$.

Detta är ej sant för diskreta s.v.

För alla tfk $f(x)$ måste gälla att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 = \mathbb{P}(-\infty < X < \infty) = \text{"sann. att } X \text{ tar ngt värde"}$$

Väntevärdet av en kont. s.v. ges av

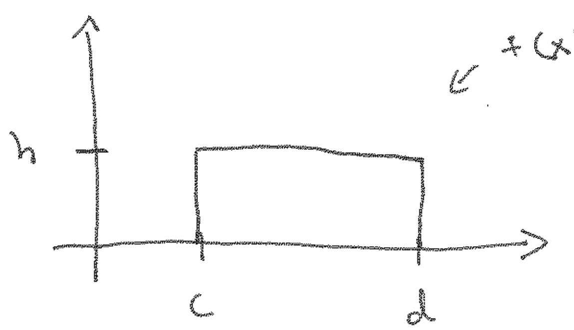
$$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \quad \text{och}$$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Likformig fördelning

Antag att X kan ta värden mellan c och d (där $c<d$). Om X "antar alla värden med lika sannolikhet" är X likformigt fördelad på $[c,d]$:



$f(x)$ lika stor överallt mellan c och d!

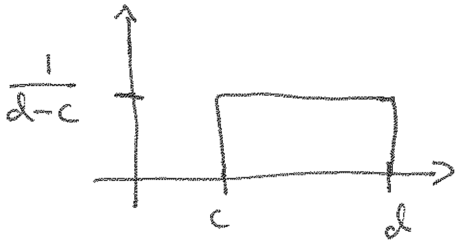
Tal:
Vad skall h vara?

L: $f(x)=0$ om $x<c$ eller $x>d$

$$\Rightarrow \quad 1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{d} f(x)\,dx+\int_{d}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{c} 0\,dx+\int_{c}^{d} h\,dx+\int_{d}^{\infty} 0\,dx = 0+h(d-c)+0$$

$$\Rightarrow \quad h=\frac{1}{d-c} \;//$$



L (alt): Den totala arean under grafen måste alltid vara 1. Dvs $(d-c)\cdot h=1$

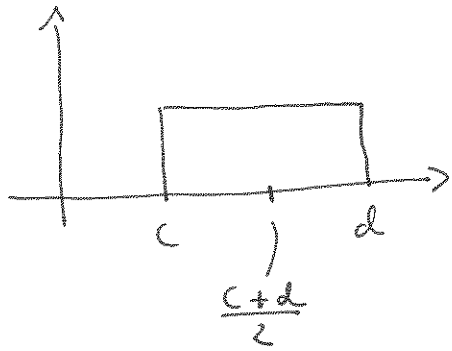
$$\Rightarrow \quad h=\frac{1}{d-c}. \;//$$

Vi skriver $X \sim U[c,d]$ (U=uniform).

Väntevärdet $\mu=E[X]=\dfrac{c+d}{2}$

Variansen $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{(d-c)^2}{12}$

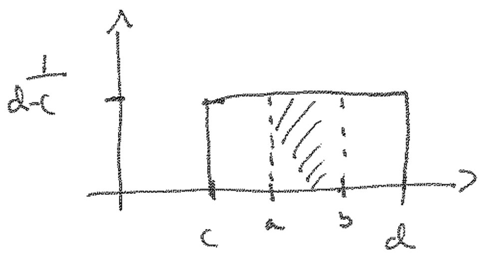
$$\Rightarrow \quad \sigma=\frac{d-c}{\sqrt{12}}.$$



Dessutom gäller att

$$P(a<X<b)=\text{bas}\times\text{höjd}$$

$$=(b-a)\cdot\frac{1}{d-c}=\frac{b-a}{d-c} \;//$$



F6 4

Normalfördelningen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ om X har

täthetsfunktion
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

horibel! Men extremt användbar...

Arean under grafen hittar vi i tabell.

Fast tabell finns bara för $\mu = 0$ och $\sigma = 1$.

Om $\mu = 0$ och $\sigma = 1$ har vi en standardiserad normalfördelning och använder Z (istället för X).

Dvs $Z \sim N(0,1)$.

Det finns tabeller för $\mathbb{P}(Z \leq a)$ och $\mathbb{P}(0 \leq Z \leq a)$.

Tal: Hitta sann. ~~för~~ $\mathbb{P}(0 \leq Z \leq \frac{1}{2})$

L: Tabell p. 241 ser $\mathbb{P}(0 \leq Z \leq \frac{1}{2}) \approx 0.1915$ //

Vad händer om $\mu \neq 0$ $\sigma \neq 1$?

Om $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Tal: Låt $X \sim N(1, 3^2)$ Hitta $\mathbb{P}(X \leq 4)$.

L: $\mathbb{P}(X \leq 4) = \mathbb{P}\left(\frac{X-1}{3} \leq \frac{4-1}{3}\right) = \mathbb{P}(Z \leq 1)$

$= \mathbb{P}(Z \leq 0) + \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 1) = \frac{1}{2} + 0.3413 = 0.8413$ //