GÖTEBORGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Broman

Matematik
MVE490

Lösning Projekt MVE490 Del 1

Det är tillåtet att sammarbeta, men alla lösningar skall lämnas in individuellt. Identiska/kopierade svar ger stora avdrag.

Sista inlämningsdag är 3e Oktober på föreläsningen. Det är ok at lämna in elektroniskt genom att maila till broman 'at' chalmers.se. OBS! Alla elektroniskt inlämnade uppgifter måste vara skrivna i en texteditor (word, latex, etc). Inscannad handskriven text rättas ej!!!

Glöm inte att skriva namn och personnummer.

Denna deluppgift kan ge högst 2.5 bonuspoäng till tentan med följande gränser:

Poäng	Bonus
0-8	0
9-13	0.5
14-19	1
20-25	1.5
26-31	2.0
32-36	2.5

1. Låt A, B vara två händelser sådana att $\mathbb{P}(A) = 0.4$, $\mathbb{P}(B) = 0.2$.

   (a) Vad blir $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(B|A)$ och $\mathbb{P}(A \cup B)$ om A och B är disjunkta? (3p)

   (b) Vad blir $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(B|A)$ och $\mathbb{P}(A \cup B)$ om A och B är oberoende? (3p)

   (c) Vad blir $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(B|A)$ och $\mathbb{P}(A \cup B)$ om A och B är sådana att $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$? (3p)

   Lösning:

   (a) Vi har att
   $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0}{\mathbb{P}(B)} = 0,$$
   och på samma sätt blir $\mathbb{P}(A|B) = 0$. Dessutom blir
   $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0.6.$$

   (b) Vi har att
   $$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) = 0.4 \text{ och } \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) = 0.2.$$

Dessutom blir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.6 - 0.08 = 0.52.\end{aligned}$$

(c) Vi får nu att

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5,$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25,$$

och att

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.6 - 0.1 = 0.5.$$

Eriks kommentar: Vitsen med talet är till stor del att ni skall lära er skillnaden mellan disjunkt och oberoende.

En del skriver bara något i stil med

$$\mathbb{P}(A|B) = 0,$$

utan närmare förklaringar, vilket inte är ok. Ni måste redovisa förståelse och det gör ni med argumentation.

2. Emilia kontrollerar en tillverkningsprocess hos en underleverantör som tillverkar mattor. Mattorna kan vara av tre kvaliteer som vi kallar A,B och C.

Mattor av kvaliteterna A,B och C kan säljas för 10000, 5000 respektive 2000 SEK.

(a) Antag att sannolikheten att en slumpmässigt utvald matta befinns vara av kvalitet A är 0.3, kvalitet B är 0.5 och kvalitet C är 0.2. Vad är då det förväntade försäljningspriset på en slumpmässigt utvald matta? Vad är den förväntade vinsten om alla mattor kostar 1500 SEK att tillverka? (4p)

(b) En konkurrerande leverantör erbjuder en lägre tillverkningskostnad på 1000 SEK per matta. Deras arbetare är dock sämre utbildade och därför är sannolikheten att en slumpmässigt utvald matta befinns vara av kvalitet nu A är 0.1, kvalitet B är 0.6 och kvalitet C är 0.3. Bör Emilia byta leverantör? (4p)

(c) För båda uppgifterna *b* och *c*, beräkna sannolikheten att en matta befinns vara av kvalitet A, givet att den inte är av kvalitet C. (3p)

Lösning:

(a) Låt F vara försäljningspriset. Vi får då att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F] &= 10000\mathbb{P}(F = 10000) + 5000\mathbb{P}(F = 5000) + 2000 * \mathbb{P}(F = 2000) \\ &= 10000 * 0.3 + 5000 * 0.5 + 2000 * 0.2 = 3000 + 2500 + 400 = 5900,\end{aligned}$$

och då vinsten $V = F - 1500$ får vi att $\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[F] - 1500 = 4400$ SEK.

(b) På samma sätt får vi här

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F] &= 10000\mathbb{P}(F = 10000) + 5000\mathbb{P}(F = 5000) + 2000 * \mathbb{P}(F = 2000)\\ &= 10000 * 0.1 + 5000 * 0.6 + 2000 * 0.3 = 1000 + 3000 + 600 = 4600,\end{aligned}$$

och då vinsten $V = F - 1000$ får vi att $\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[F] - 1000 = 3600$ SEK. Emilia bör helt klart inte byta leverantör.

(c) Låt K beteckna kvaliteten. Vi får att

$$\mathbb{P}(K = A | K \neq C) = \frac{\mathbb{P}(K = A)}{\mathbb{P}(K \neq C)} = \frac{\mathbb{P}(K = A)}{1 - \mathbb{P}(K = C)} = \frac{0.3}{1 - 0.2} = 3/8,$$

i uppgift a, och att

$$\mathbb{P}(K = A | K \neq C) = \frac{\mathbb{P}(K = A)}{\mathbb{P}(K \neq C)} = \frac{\mathbb{P}(K = A)}{1 - \mathbb{P}(K = C)} = \frac{0.1}{1 - 0.3} = 1/7,$$

i uppgift b.

Eriks kommentarer: Uppgift (c) var klart lurigast, speciellt var det många som använder väldigt skumma beteckningar vilket rör till räkningarna.

3. Harald jobbar för hälsomyndigeten i en stor stad och genomför oannonserade inspektioner på restauranger. Låt p =sannolikheten att en slumpmässig restaurang befinns ha bristfällig hygien.

(a) Om Harald under en vecka inspekterar 20 restauranger, vilken fördelning har det antal restauranger som befinns ha bristfällig hygien? Beskriv och motivera eventuella antaganden. Är dessa rimliga? Vad talar emot? (4p)

(b) Använd ditt svar i a för att beräkna sannolikheten att minst två restauranger är ohygieniska om $p = 0.1$. Ange ett exakt uttryck för ditt svar och ange även ett närmevärde med minst 3 siffror. (4p)

Lösning.

(a) Det enda som kan passa här är binomialfördelningen. Detta kräver att hygientillståndet hos alla restauranger är oberoende av varandra. Detta är ett rimligt antagnade, men det kan vara behäftat med viss osäkerhet. En stor kedja som drivs av samma person kan antas ha en ganska så homogen hygienkultur t.ex.

(b) Låt $X =\#$ restauranger som är ohygieniska. Vi söker då

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)\\ &= 1 - \binom{20}{0} p^0 (1-p)^{20} - \binom{20}{1} p * (1-p)^{19}\\ &= 1 - 0.9^{20} - 20 * 0.1 * 0.9^{19} \approx 0.6083\end{aligned}$$

Eriks kommentarer: Denna gick för det mesta bra, men argumentationen i uppgift (a) haltade ganska ofta. Jag såg även en hel del som satte $p = 1/2$ bara för att det fanns två val. Det är helt orimligt.

4. Glennita sorterar brev på posten. Det tar i genomsnitt 12 sekunder, och med en varians på 131 sekunder att hitta rätt adressat.

   (a) Under en dag får Glennita 1423 brev att sortera. Om den sammanlagde tiden för sorterandet betecknas med T, vilken fördelning har då T? Beskriv eventuella antaganden och osäkerheter. (4p)

   (b) Använd fördelningen i uppgift a för att beräkna sannolikheten att Glennita får jobba med sorterandet i mer än 5 timmar. (4p)

Lösning:

(a) Här är det helt klart lämpligt att amnvända normalapproximation då antalet brev är mycket stort. Om $S_1, \ldots, S_{1423}$ får beteckna de olika sorteringstiderna så har vi att $T = \sum_{k=1}^{1423} S_k$. Vi får att

$$\begin{aligned} T &\sim N(1423 * \mathbb{E}[S_1], 1423 * \mathrm{Var}(S_1)) \\ &= N(1423 * 12, 1423 * 131) = N(17076, 186413), \end{aligned}$$

där T anges i sekunder.

(b) 5 timmar är $5 * 3600 = 18000$ sekunder. Den sökta sannolikheten blir då

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(T \geq 18000) \\ &\quad = \mathbb{P}\left(\frac{T - 17076}{\sqrt{186413}} \geq \frac{18000 - 17076}{\sqrt{186413}}\right) \approx \mathbb{P}(Z \geq 2.14) \approx 0.01618. \end{aligned}$$

Eriks kommentarer: Denna uppgift gick klart sämst. Följande är extra viktigt:

- Många blandar ihop sorteringstiden för ett enskilt brev med den totala sorteringstiden T.
- Man kan *inte* anta att fördelningen för ett enskilt brev är normal (eller något annat för den delen). Vitsen med hela talet (och detta är extremt viktigt för statistikdelen av kursen) är att ni kan använda normalapproximation (dvs centrala gränsvärdessatsen) för att ändå veta att T självt är approximativt normalfördelad. Detta var det bara en person som klurade ut, så det är extremt viktigt att ni förstår detta faktum. Läs noga i boken och i anteckningarna från Eriks sista föreläsning.