Projekt MVE490 Del 2

Det är tillåtet att sammarbeta, men alla lösningar skall lämnas in individuellt. Identiska/kopierade svar ger stora avdrag.

Sista inlämningsdag är 17e oktober på föreläsningen. Det är ok att lämna in elektroniskt genom att maila till simonssi 'at' chalmers.se. OBS! Alla elektroniskt inlämnade uppgifter måsta vara skrivna i en texteditor (word, latex, etc). Inscannad handskriven text rättas ej!!!

Glöm inte att motivera era svar! Svar utan motivering ger 0 poäng! Glöm ej heller att skriva namn och personnummer.

Denna deluppgift kan ge högst 2.5 bonuspoäng till tentan med följande gränser:

Poäng	Bonus
0-8	0
9-13	0.5
14-19	1
20-25	1.5
26-31	2.0
32-36	2.5

1. Glenn-Erik är intresserad av en proportion p och har samlat in ett stickprov från den relevanta populationen. Det framtagna konfidensintervallet för p blev $[0.28; 0.54]$ (signifikansnivå $\alpha = 0.05$). Längden på intervallet är alltså $0.54 - 0.28 = 0.26$.

   Kommentar: För det allra flesta har det gått bra på hela denna uppgift.

   (a) Vad är konfidensgraden? (1p)

   L: Konfidensgraden anges i procent: 100(1-α)%, i detta fall 95%.

   (b) Vad är värdet på punktskattningen $\hat{p}$? (4p)

   L: Eftersom konfidensintervall för en proportion är symmetriska kring $\hat{p}$ vet vi att $\hat{p}$ ligger mitt emellan ℓ och u. Alltså: $\hat{p} = 0.41$.

   (c) Om signifikansnivån istället hade varit $\alpha = 0.01$, hade konfidensintervallet då varit längre eller kortare? (3p)

   L: Längre eftersom $z_{\alpha/2}$ då hade varit större. Detta borde inses eftersom vi med ökad konfidensgrad (alltså mindre α) vill vara säkrare på att vårt konfidensintervall täcker μ. Konfidensintervallet måste alltså bli längre.

   (d) Hur stort är stickprovet? (4p)

   L: Kom ihåg att konfidensintervallet ges av:

$$\ell = \hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \qquad u = \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Eftersom vi har listat ut vad $\hat{p}$ är så vet vi allt förutom n. Vi vet t. ex. att $u = 0.54$, att $\hat{p} = 0.41$ och att $z_{\alpha/2} = 1.96$. Om vi sätter in dessa tal i formeln för u och löser ekvationen får vi att

$$n = 1.96^2 * \left(\frac{0.41 * 0.59}{0.13}\right)^2 = 54.9872 \approx 55. \tag{1}$$

Samma härledning går att göra med formeln för ℓ istället för u, resultatet blir samma.

(e) Om vi antar att $\hat{p}$ inte ändras, hur stort måste stickprovet vara för att längden på konfidensintervallet ska vara högst 0.20? (4p)

L: Här använder vi samma resonemang som i uppgift (d). Vi använder även ekvation (1) fast med $0.20/2 = 0.10$ istället för 0.13. Vi får alltså att

$$n = 1.96^2 * \left(\frac{0.41 * 0.59}{0.10}\right)^2 = 92.9283 \approx 93.$$

2. Snabba algoritmer AB (SAAB) är ett företag som producerar snabba algoritmer. En av företagets algoritmer löser ett specifikt problem på 15 sekunder. Herbert som jobbar på SAAB får i uppdrag att skriva en ny (slumpmässig) algoritm som i genomsnitt löser problemet snabbare. Albert som också jobbar på SAAB vill göra ett hyptestest för att försäkra sig om att Herberts nya algoritm verkligen löser problemet snabbare än den gamla algoritmen. Problemet löses tolv gånger med Herberts nya algoritm och tidsåtgångerna (i sekunder) uppmättes:

12.1	15.4	13.5	14.6	14.1	13.8	15.9	11.5	16.2	14.4	12.8	14.5

Vi kan anta att tiderna kommer från en normalfördelning.

Du ska nu hjälpa Albert med hypotestestet. Använd signifikansnivå $\alpha = 0.01$.

Kommentar: På uppgifterna (a)-(d) hade de flesta gjort helt rätt.

(a) Ställ upp noll- och alternativhypotesen. (2p)

L: Låt μ beteckna det riktiga väntevärdet för tidsåtgången när Herberts nya algoritm löser problemet. Eftersom vi vill visa att den nya algoritmen är snabbare ($\mu < 15$) så är det detta vi sätter i den alternativa hypotesen. Alltså blir hypoteserna följande.

$$H_0 : \mu \geq 15$$
$$H_1 : \mu < 15$$

(b) Vilken teststatistika ska vi använda? (3p)

L: Givet i uppgiften är att tiderna kommer från en normalfördelning. Eftersom vi inte får något givet värde på variansen σ^2 så måste vi skatta den med s^2. Teststatistikan vi måste använda är alltså

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

(c) Vad har teststatistikan för fördelning? (3p)

L: Eftersom $n = 12$ inte är stort nog för att använda centrala gränsvärdessatsen så kan vi inte säga att teststatistikan är normalfördelad. Alltså är den t-fördelad med $n - 1 = 11$ frihetsgrader.

(d) Vad blir värdet på den observerade teststatistikan? (3p)

L: Stickprovsmedelvärdet blir $\bar{x} = 14.07$. Vi kan också räkna ut att $s^2 = 2.0661$ vilket ger $s = 1.4374$. Den observerade teststatistikan blir alltså

$$\frac{14.07 - 15}{1.4374/\sqrt{12}} = -2.2493$$

(e) Ska vi förkasta nollhypotesen? (3p)

L: Vi tittar i tabellen efter det kritiska värdet $t_{0.01,11} = -2.7181$. Eftersom det kritiska värdet är mindre (ligger längre ifrån 0) än den observerade teststatistikan så kan vi inte förkasta nollhypotesen på signifikansnivå $\alpha = 0.01$.

Kommentar: Här har endel jämfört med två kritiska värden, det ger avdrag. När man gör ensidiga test så ska man bara jämföra den observerade teststatistikan med ett värde. Vissa har även skrivit något i stil med "$H_0 > \alpha$ därför kan vi inte förkasta H_0". Detta har också gett avdrag.

(f) Stickprovsmedelvärdet är $\bar{x} = 14.07$. Herbert hävdar att bara för att $\bar{x}$ är mindre än 15 så kan vi direkt dra slutsatsen att hans nya algoritm i genomsnitt är snabbare än den gamla. Förklara varför Herbert har fel. (3p)

L: Herberts resonemnang ignorerar vikten av stickprovsvaransen. Om stickprovsvariansen är stor så skulle stickprovsmedelvärdet kunna vara mindre än 15 av ren slump. Generellt sätt får vi mindre stickprovsvarians desto större stickprovet är. Det är lättare att dra slutsatser ju mer data vi har!

Kommentar: Här har jag gett 2p om man nämnt att Herbert ignorerar variansen och 1p om man nämnt att stickprovsstorleken ger mindre varians/mer säkerhet kring $\bar{X}$.

(g) P-värdet för testet är 0.023[1]. Om signifkansnivån hade varit $\alpha = 0.05$, hade vi förkastat nollhypotesen då? Ledning: svara med hjälp av p-värdet, gör inte ett nytt test! (3p)

L: Eftersom p-värdet är mindre än 0.05 så hade vi förkastat nollhypotesen på signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Kommentar: Här har många tittat i tabellerna och tagit fram kritiska värden. Även om det i slutändan har lett till att ni förkastar H_0 så har jag dragit av poäng för det. Ni ska kunna att om p-värdet är mindre än signifikansnivån så ska man förkasta H_0. Detta gäller oavsett test, oavsett fördelning på teststatistikan, oavsett data, oavsett stickprovsstorlek...

[1]Det går inte att ta fram detta p-värde genom att titta i tabellerna som finns på kurshemsidan. Däremot kan man ta fram det genom att använda t. ex. Matlab.