Föreläsning 4/9

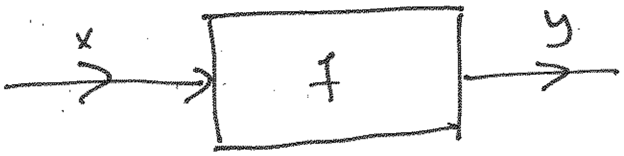
Innehållet i denna kurs kan delas in i tre block. Två huvudblock och ett kortare förberedande block. De två första föreläsningarna ägnas åt det förberedande blocket och då går vi igenom viktiga matematiska begrepp såsom funktion, derivata, integral, summation.
De två huvudblocken handlar om <u>sannolikhetslära</u> och <u>statistik</u>.

<u>Sannolikhetslära</u>	<u>Statistik</u>
Behandlar slumpmodeller, dvs modellering av slumpmässiga fenomen.	Samla och analysera data med avsikt att dra slutsatser och ta beslut.
<u>Ex.</u> → Sannolikhetsberäkningar i poker → Riskbedömningar inom försäkringsbranchen	<u>Ex</u>: → Testa om en medicinsk behandling har effekt → Bedöma hur stor del av befolkningen som kommer att rösta på ett visst parti

Indelningen ovan är inte helt strikt, gränsdragningen mellan sannolikhetslära och statistik är inte alltid solklar. Man måste förstå grunderna inom sannolikhetslära för att kunna lära sig de statistiska metoderna som gås igenom senare i kursen.

Funktioner

En funktion är (intuitivt) en svart låda som för varje in-värde x spottar ut ett ut-värde y.



Man skriver ofta $y=f(x)$.

Ex 1: Under tre veckor registrerades åtgången av cement i ett bygge

"Bild cement"

Åtgången av cement är en funktion av dagen. Detta är ett exempel på en _diskret_ funktion. Här finns 21 in-datapunkter $x_1, x_2, \dots, x_{21}$. T.ex. är $x_1 = 1$ och $f(x_1) = 1275$, $f(6) = 0$, $f(16) = 6523$ etc.

Ex 2: Positionen (meter över marken) som funktion av tid för en startande raket betraktas.

"Bild Raket 1"

Här är t = tid och $y = f(t)$ = position.

Ex 3: In-datan är kort från en kortlek och ut-datan är färgen på kortet.

Om x = spader fem så är $y = f(x)$ = spader

Om x = ruter kung så är $y = f(x)$ = ruter

Exempel 3 visar att in/ut-data inte behöver vara tal.

Några vanliga typer av funktioner:

Polynom: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$, $f(x) = x^{10}$, ... o.s.v.

Exponentialfunktioner: $f(x) = a^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$, ~~...~~, o.s.v.

Trigonometriska funktioner: $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \tan(x)$, $f(x) = \arcsin(x)$, $f(x) = \cot(x)$, o.s.v.

Sammansatta funktioner: $f(x) = e^{x^2}$, $f(x) = \sin^2(x)$, o.s.v.

④ Exempel 1-3 ovan ger upphov till några naturli
frågor.

I exempel 1, hur mycket cement gick åt under vecka 1? Vecka 2? Vecka 3? Totalt? Detta klarar vi genom att summera.

I exempel 2, vilken genomsnittlig hastighet håller raketen under de första 20 sekunderna?

$$\text{Hastighet} = \frac{\text{sträcka}}{\text{tid}} = \frac{1600}{20} = 80 \text{ m/s}$$

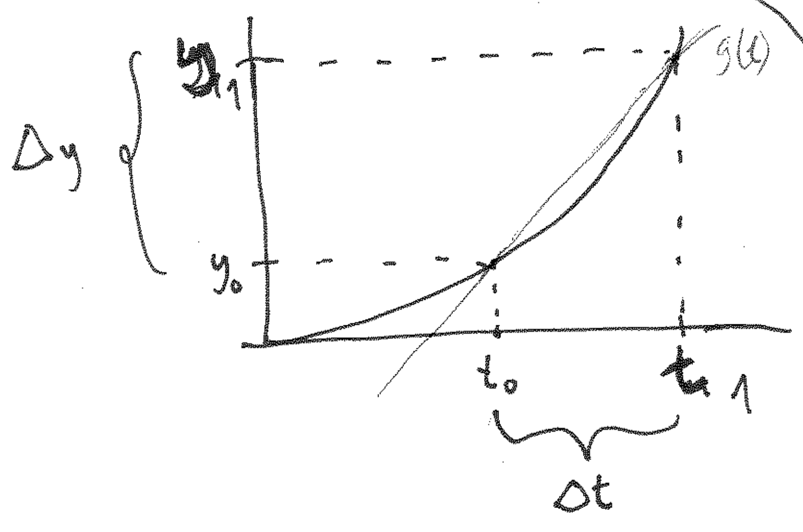
Hur gör vi om vill ha den genomsnittliga hastigheten de första 10 sekunderna? De sista 10?

" Bild Raket 2, Raket 3 "

$$v = \frac{\text{sträcka}}{\text{tid}} = \frac{1200}{10} = 120 \text{ m/s} \qquad (\text{sista } 10)$$

$$\frac{400}{10} = 40 \text{ m/s} \qquad (\text{första } 10)$$

Genomsnittshastigheten ges av $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \cancel{\frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}} = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}$



mellan tid t_0 och tid t_1

Betrakta nu funktionen $g(t) = k(t - t_0) + y_0$

där $k = \frac{\Delta y}{\Delta t}$. Vi har att $g(t_0) = k \cdot 0 + y_0 = y_0$

och $g(t_1) = \frac{y_1 - y_0}{\cancel{t_1 - t_0}} \cdot \cancel{(t_1 - t_0)} + y_0 = y_1$.

Lutningen k för funktionen $g(t)$ beskriver alltså genomsnittshastigheten. Jämför med $y = kx + m$.

Om vi låter $t_0 = 10$ och $t_1 = 20, 18, 16, \ldots$, dvs vi minskar t_1, så hittar vi genomsnittshastigheten för kortare och kortare tidsintervall efter tiden 10. Om t_1 är mycket nära t_0 så får vi den ungefärliga hastigheten vid tiden t_0.

Alltså:

$$\text{hastighet vid tid } t_0 = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} = f'(t_0)$$

$f'(t_0)$ kallas för derivatan av f vid tiden t_0.

"Visa lutningsbilder"

I vårt fall får vi att $f'(10) = 80$.

Här är $f(t) = 4t^2 \Rightarrow f'(t) = 8t$

⑥ Några deriveringsregler:

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$
konstant	0
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$e^{\alpha x}$	$\alpha e^{\alpha x}$