Föreläsning 6/9

Integraler

Vi tittar på raketbilden igen. Om vi istället för raketens position har raketens hastighet på y-axeln, hur skulle det se ut?

"Bild raket speed1"

Låt säga att vi inte har tillgång till de tidigare bilderna, hur kan vi utifrån hastighetsbilden ta reda på hur långt raketen har färdats, säg mellan tid $t=0$ och tid $t=30$?

Om funktionen hade varit helt platt så hade det varit enkelt. T ex om vi hade hållit konstant hastighet 0.9 m/s under 30 sekunder så hade vi färdats,

$$0.9 \text{ m/s} \cdot 30 \text{ s} = 27 \text{ m}$$ (Rita!)

Låt oss zooma in på tidsintervallet mellan $t=0$ och $t=5$. För att få en bättre uppskattning av den totala sträckan så delar vi upp intervallet i delintervall och utför samma procedur som ovan. Sträckan ~~fär~~ som färdats under hela intervallet borde ju rimligtvis vara lika med summan av sträckorna som färdats under delintervallen.

"Bild raket speed2"

Från den första stapeln får vi $0.32\,m/s \cdot 0.5s = 0.16m$. Observera att detta är en <u>underskattning</u> av sträckan färdad under denna tidsperiod eftersom grafen ligger över 0.32 under hela delintervallet. Observera också att <u>arean</u> av stapeln är 0.16 (arean = basen · höjden).

~~Ju finare indelning, dvs~~

För att få en approximation för sträckan färdad mellan $t=0$ och $t=5$ så summerar vi arean för alla dessa staplar. Ju finare indelning, dvs ju fler delintervall och ju fler staplar, desto bättre blir approximationen. Man kan visa att den exakta sträckan som färdats = arean under grafen.

"Bild raket speed3"

Men hur beräknar vi arean exakt? Med integralen!

Kom ihåg att hastighet = derivatan av sträckan som funktion av tiden. Om hastigheten ges av $f(t)=2t$ beräknar vi sträckan färdad genom att använda den funktion vars derivata är $2t$.

8

Sträckan färdadad mellan tid 0 och 5 =

= Arean under grafen mellan tid 0 och 5 =

= Integralen av funktionen mellan 0 och 5 =

$$= \int_0^5 2t\,dt = \Big[t^2\Big]_0^5 = 5^2 - 0^2 = 5^2 = 25.$$

$\boxed{\text{Integralen = Arean under grafen}}$

---

## Summor

När vi har många termer att summera så är det smidigt att använda summanotationen:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

En bra egenskap att hålla koll på är följande

$$\sum_{k=1}^{n} c x_k = c \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{för konstant } c.$$

Hur kan vi se att detta alltid stämmer?

$$\sum_{k=1}^{n} c x_k = c x_1 + c x_2 + \dots + c x_n = c(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = c \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Några vanliga fall:

i) $x_k = k \implies \sum_{k=1}^{n} k$

ii) $x_k = k^2 \implies \sum_{k=1}^{n} k^2$

iii) $x_k = a^k$ för något $a>0 \implies \sum_{k=1}^{n} a^k$

<u>Observera</u> att $k$ inte alltid måste börja på 1.
Vi kan till exempel ha

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad , \quad \text{eller}$$

$$\sum_{k=5}^{n} x_k = x_5 + x_6 + \ldots + x_n$$

Fallet $x_k = k$ (exempel i) ovan) förekommer ofta, därför kan det vara smidigt att ta fram en formel för detta.

<u>Sats</u>: Vi har att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

<u>Bevis</u>: Antag först att $n$ är jämnt. Vi har då

$2+(n-1)=n+1$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2}+1\right) + \ldots + (n-1) + n =$$

$\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}+1\right)=n+1$ $\qquad n+1$

$$= (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \ldots + \left(\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}+1\right)\right) =$$

$$= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n/2 \text{ ggr}} = \frac{n}{2}(n+1)$$

Antag $n$ udda. Lämnas som övning! ☒

(10) Låt oss försöka hitta ett uttryck för $\sum_{k=0}^{n} a^k$ (exempel iii) ovan). Låt $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$.

Idé: "$S_n$ och $aS_n$ är ungefär samma"

Vi har att

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$$

och att

$$aS_n = a\sum_{k=0}^{n} a^k = a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n+1} =$$

$$= (1 + a + a^2 + \dots + a^n) - 1 + a^{n+1} =$$

$$= S_n + a^{n+1} - 1$$

Detta medför att

$$aS_n - S_n = S_n + a^{n+1} - 1 - S_n = a^{n+1} - 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S_n(a-1) = a^{n+1} - 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S_n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Observera att detta inte gäller om $a = 1$.

Vi har kommit fram till att

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad \text{för } a \neq 1}$$

Gör övningarna i kapitel 2.3 i boken!

Här kommer några extra övningar.

1] Låt $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = -4$, $x_4 = 0$ och beräkna

a) $\sum_{k=1}^{4} 3x_k$ , b) $\sum_{k=1}^{4} (-x_k)^2$

c) $\sum_{k=1}^{4} \frac{x_k}{x_1}$ , d) $\sum_{k=1}^{4} k\,x_{5-k}$

e) $\sum_{k=1}^{2} x_k \cdot x_{2k}$ , f) $\sum_{k=1}^{4} (x_k - 2)$

2] Bevisa att (övertyga dig själv om att)

$$\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)$$

3] Ge ett exempel där det inte gäller att

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$