Föreläsning 7/9

Vi börjar med ett exempel

Exempel: Anden i flaskan Emil är odödlig och bor i en värld där årsräntan R är fix för all framtid. Banken skriver ett kontrakt med Emil där de ger honom 100 kr i slutet av varje år. Hur mycket bör Emil betala för detta kontrakt?

Lösning: Värdet ~~efter~~ av 100 kr efter ett år är $\frac{100}{1+R}$ kr. Värdet av 100 kr efter k år är $\frac{100}{(1+R)^k}$ kr. Efter n år är pengarna som Emil nottagit

$$\frac{100}{1+R} + \frac{100}{(1+R)^2} + \ldots + \frac{100}{(1+R)^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{100}{(1+R)^k} =$$

$$= \frac{100}{1+R}\left(1 + \frac{1}{1+R} + \frac{1}{(1+R)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+R)^{n-1}}\right) = \frac{100}{1+R}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(1+R)^k}$$

Dett uttryck känner vi igen från förra föreläsningen:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

$a = \frac{1}{1+R}$ ger att $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+R}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{1+R}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+R} - 1}$

② Vårt sökta värde (efter n år) blir då

$$\frac{100}{1+R}\cdot\frac{\left(\frac{1}{1+R}\right)^n-1}{\frac{1}{1+R}-1} = \frac{100\left(\left(\frac{1}{1+R}\right)^n-1\right)}{1-1-R} = \frac{100\left(\left(\frac{1}{1+R}\right)^n-1\right)}{-R} =$$

$$= \frac{100}{R}\left(1-\left(\frac{1}{1+R}\right)^n\right).$$

~~Kan~~ Detta är värdet om vi begränsar oss till n år. Men banken skulle betala i slutet av varje år i all framtid, vad händer med värdet då? Dvs vad händer om vi låter n gå mot oändligheten? ($n\to\infty$)

Gränsvärden

Låt $a_1, a_2, \ldots$ vara en oändlig sekvens av tal, ~~[illegible]~~ och låt A vara ett annat tal. Vi säger att a_n går mot A när n går mot oändligheten om skillnaden mellan a_n och A ~~[illegible]~~ försvinner när n går mot oändligheten. Vi skriver då $a_n \to A$ när $n\to\infty$

eller $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

Ex 1: $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{4}, \ldots, a_n = \frac{1}{2^n} \ldots$

Om $A=0$ har vi att

$$|a_n - A| = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} \to 0 \quad \text{när } n\to\infty$$

Så a_n går mot 0 när $n\to\infty$.

Ex 2: Låt $|a|<1$ och $b_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$.

Om $B = \frac{1}{1-a}$ så får vi att

$$|b_n - B| = \left| \frac{a^{n+1}-1}{a-1} - \frac{1}{1-a} \right| = \left| \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{1}{1-a} \right| =$$

$$= \left| \frac{1-a^{n+1}-1}{1-a} \right| = \left| \frac{-a^{n+1}}{1-a} \right| = \frac{|a|^{n+1}}{1-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Alltså vet vi att $\sum_{k=0}^{n} a^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-a}$ om $|a|<1$

Låt oss återgå till exemplet med Emil och banken. Låt $a_n = \frac{100}{R}\left(1-\left(\frac{1}{1+R}\right)^n\right)$ och $A = \frac{100}{R}$. Vi har då

$$|a_n - A| = \left| \frac{100}{R}\left(1-\left(\frac{1}{1+R}\right)^n\right) - \frac{100}{R} \right| =$$

$$= \left| \frac{100}{R}\left(1-\left(\frac{1}{1+R}\right)^n - 1\right) \right| = \frac{100}{R}\left| -\left(\frac{1}{1+R}\right)^n \right| =$$

$$= \frac{100}{R}\left(\frac{1}{1+R}\right)^n \longrightarrow 0 \quad \text{när } n \to \infty$$

Alltså är värdet på Emils kontrakt $\frac{100}{R}$ kr.

Sannolikhetsteori (kap 3)

Grundläggande modell:

Ett slumpmässigt experiment genomförs

a) Ett utfall är en specifik observation av experimentet.

b) Mängden av alla möjliga utfall kallas för utfallsrum (sample space) och betecknas med S eller Ω.

c) En händelse är en specifik samling av utfall. Dessa betecknas ofta med A, B, C, etc. Vi skriver $A \subseteq S$, $B \subseteq S$, etc.

Ex 1: Vi kastar en tärning $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A = \{1, 3, 5\}$ är händelsen att resultatet är udda.

Ex2: Vi singlar två slantar. (H = heads, T = tails)

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$. $B = \{HT, TH, TT\}$ är händelsen att få minst ett T.

Ex 3: Väntetid (kassan på ICA, kundservice, sönderfall)

$S = [0, \infty)$, $A = [0, 1]$ är händelsen att väntetiden är ≤ 1.

Vi har nämnt ordet händelse redan. Det matematiska ordet är egentligen mängd. I denna kurs betyder mängd och händelse samma sak.

En händelse består av ett antal ~~ø~~ utfall. På liknande sätt så består en mängd av ett antal element. Vi använder symbolen $\in$ för att beteckna att ett element (utfall) ligger i en mängd (händelse). När vi skriver $a \in A$ betyder det alltså att elementet a ligger i mängden A.

Om vi har två mängder (händelsen) A och B där alla element i A också finns i B så säger vi att A är en delmängd (delhändelse) till B och vi skriver $A \subseteq B$.

Ex 4: Vi kastar en tärning. Låt A vara händelsen att vi slår udda och låt B vara händelsen att vi inte slår en sexa. Vi har alltså $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vi kan ~~skriva~~ t ex skriva $1 \in A$ och $1 \in B$. Eftersom alla ~~elem~~ utfall i A också finns i B så är A en delhändelse till B, alltså $A \subseteq B$.