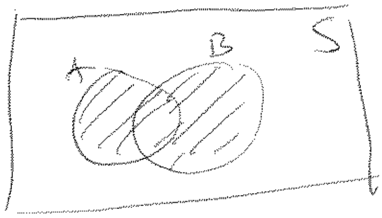
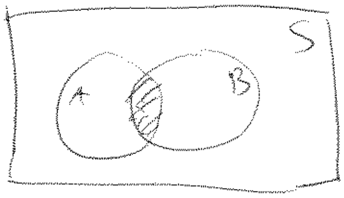
⑥ Lite fler ord och symboler:

i) $A \cup B$ = "A union B" = "A eller B eller båda" =

$= \{s \in S : s \in A$ eller $s \in B\}$

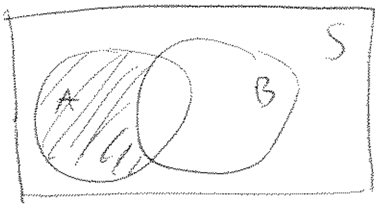


ii) $A \cap B$ = "A snitt B" = "A och B" = $\{s \in S : s \in A$ och $s \in B\}$



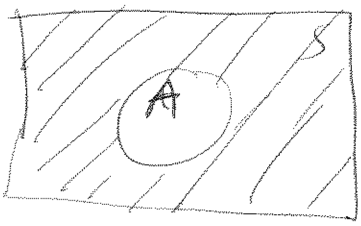
iii) $A \setminus B$ = "A men inte B" =

$= \{s \in S : s \in A$ men inte $s \in B\}$



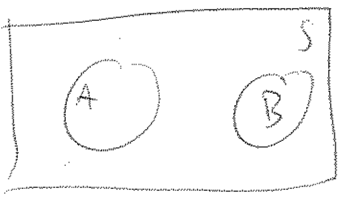
iv) A^c = "A-komplement" =

= "A händer ej"



v) A och B kallas <u>disjunkta</u> om $A \cap B = \emptyset$

där $\emptyset$ betecknar tomma mängden, dvs en mängd utan element.



Symbolen P (eller $\mathbb{P}$) används för att beteckna sannolikheten av en händelse. Så sannolikheten för en händelse A betecknas P(A) och utläses "sannolikheten för A".

Några räkneregler:

i) $0 \leq P(A) \leq 1$ för varje händelse $A \subseteq S$

ii) $P(S) = 1$ (sannolikheten att något händer är 1)

iii) Om A och B är disjunkta så gäller att

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

~~Exempel~~: Vi kastar tärning. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Tal: (Ex 4)

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Beräkna: a) $P(A)$ b) $P(B)$

c) $P(B \setminus A)$ d) $P(B^c)$

e) $P(A \cup B^c)$ f) $P(A \cap B)$

Lösning: a) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{5}{6}$

b) $P(B \setminus A) = ?$

Hur ser händelsen $B \setminus A$ ut?

$B \setminus A = \{2, 4\}$, alltså $P(B \setminus A) = \frac{1}{3}$

d) $P(B^c) = P(\text{slå en sexa}) = \frac{1}{6}$

e) $P(A \cup B^c) = ?$

B^c är händelsen att slå en sexa, dvs $B^c = \{6\}$. Nu inser vi att A och B^c är disjunkta så vi kan använda regel v) ovan. Vi får då

$$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

f) $P(A \cap B) = ?$

Hur ser händelsen $A \cap B$ ut?

$A \cap B = \{1, 3, 5\}$, alltså har vi

$P(A \cap B) = \frac{1}{2}$.

I detta fall har vi att $A \cap B = A$.

Generellt gäller att om $A \subseteq B$ så $A \cap B = A$

Kombinatorik

Antag att vi har n objekt. På hur många sätt kan vi rada upp dessa?

Det första objektet kan väljas på n olika sätt

Det andra objektet kan väljas på n-1 olika sätt

⋮

Totalt: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ ← "n-fakultet"

Ex: Du blandar hjärter knekt, dam och kung, på hur många sätt kan ordningen bli? Svar $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Test: Kn, D, K D, K, Kn

Kn, K, D K, Kn, D

D, Kn, K K, D, Kn

Fakultetfunktionen växer väldigt snabb, dvs även om vi har ett ganska litet värde på n så kommer n! vara stort.

Ex: En klass ~~av~~ på 20 elever ställer sig i matkön. På hur många sätt kan detta ske?

Svar: $20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \approx 24 \cdot 10^{17}$

Antag igen att vi har n objekt, men nu vill vi ~~kan~~ välja ut k av dessa. På hur många sätt kan vi göra detta?

Lite svårare... svaret är $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

~~[illegible] n över k ("n choose k")~~

Detta uttryck kallas "n över k" ("n choose k").

Tal: Kalle har 5 olika öl, på hur många sätt kan han välja 2 av dessa?

L: $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 5\cdot 2 = 10$

Tal: Hur många pokerhänder finns det?

L: $\binom{52}{5} = \dfrac{52!}{5!\,47!} = \ldots$ (miniräknare) $\ldots = 2\,598\,960$

Tal: Ni är 30 personer i klassen, på hur många sätt kan man välja ut 3 kursrepresentanter?

L: $\binom{30}{3} = \dfrac{30!}{3!\,27!} = \dfrac{30\cdot 29\cdot 28}{3\cdot 2\cdot 1} = 4060$

Tre räkneregler för sannolikheter

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2) $P(A^c) = 1 - P(A)$

3) Divisionsregeln: Om alla utfall i S är lika sannolika gäller att

$$P(A) = \frac{\#\text{ utfall i } A}{\#\text{ utfall totalt}} = \frac{|A|}{|S|}$$

Regel 3) har vi använt några gånger redan när vi har slagit tärning. T.ex. om $A = \{1, 3, 5\}$ så är

$$P(A) = \frac{\#\text{ utfall i } A}{\#\text{ Utfall totalt}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

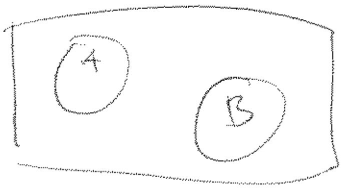
En kommentar om regel 1):

Kom ihåg att om A och B är disjunkta så hade vi en tidigare regel som sa att $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Om A och B är disjunkta så gäller att $A \cap B = \emptyset$ och regel 1) ovan ger att

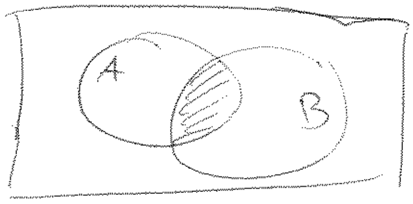
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} = P(A) + P(B)$$

Regel 1 kan generellt sett illustreras väl med venn-diagram.

Disjunkt



Ej disjunkt



Tal: Jenny drar två kort ur en kortlek.

Låt A vara händelsen att hon får minst en hjärter

Låt B vara händelsen att hon får minst en spader

a) Beräkna $P(A)$

b) Beräkna sannolikheten att Jenny får en hjärter och en spader.

L: a) $P(A) \overset{2)}{=} 1 - P(A^c) \overset{3)}{=} 1 - \frac{\#\text{ utfall i } A^c}{\#\text{ utfall totalt}} = 1 - \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} \approx 0.44$

b) Vi söker $P(A \cap B)$

Vi har att $P(A \cup B) \overset{1)}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$$= 2P(A) - P(A \cap B)$$

vilket medför att

$$P(A \cap B) = 2P(A) - P(A \cup B) =$$

$$\overset{2)}{=} 2P(A) - \left(1 - P\left((A \cup B)^c\right)\right) =$$

$$\overset{3)}{=} 2P(A) - \left(1 - \frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}}\right) =$$

$$= 2 - 2 \cdot \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} - 1 + \frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\binom{52}{2} - 2\binom{39}{2} + \binom{26}{2}}{\binom{52}{2}} \approx 0.13$$