Betingade sannolikheter

Ex. Tärningsexemplet igen med $A = \{1, 3, 5\}$ och $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Om vi vet att B har hänt, vad är då sannolikheten att A också har hänt?

Def: Den betingade sannolikheten för A givet B betecknas med $P(A \mid B)$ och ges av

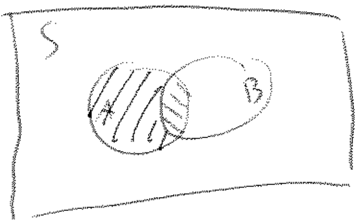
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{"A givet B"}$$

Tärningsexemplet ger $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{3}{5}$

Till nästa tal behöver vi två till regler:

1) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

2) $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$



Hur kan vi förstå att 2) stämmer?

$$P(A^c \mid B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} \overset{1)}{=} \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= 1 - P(A \mid B)$$

OBS! ~~P(A∩B) = P~~ $A \cap B = B \cap A$ och $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

(2)

Tal: I en population är 0.1 % drabbade av en viss typ av cancer. Ett diagnostiskt verktyg upptäcker cancern med sannolikhet 0.95 hos en drabbad individ, och ~~diagnsticerar~~ diagnosticerar en friska individ som ej drabbad med sannolikhet 0.98. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald individ får positiv diagnos?

L: Låt $A = \{\text{individen får positiv diagnos}\}$

$B = \{\text{individen är drabbad}\}$

Vad vet vi? $P(B) = 0.001$ $\quad P(A \mid B) = 0.95$

$P(A^c \mid B^c) = 0.98$

Vi vill veta $P(A)$.

$$P(A) \stackrel{1)}{=} P(A \cap B) + P(A \cap B^c) =$$

$$= \frac{P(A \cap B)\,P(B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B^c)\,P(B^c)}{P(B^c)} =$$

$$= P(A \mid B)\,P(B) + P(A \mid B^c)\,P(B^c) =$$

$$\stackrel{2)}{=} 0.95 \cdot 0.001 + \left(1 - P(A^c \mid B^c)\right)\left(1 - P(B)\right)$$

$$= 0.95 \cdot 0.001 + (1 - 0.98)(1 - 0.001)$$

$$= 0.00095 + 0.01998 = 0.02093$$

SVAR: 2.093 %

Tal: En naturlig fråga som kan dyka upp är, givet att en individ fått en positiv diagnos, vad är sannolikheten att individen är drabbad?

L: Observera att vi känner till $P(A|B)$ och att vi vill ta reda på $P(B|A)$.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.001}{0.02093} \approx 0.04539 \quad \text{OBS!}$$

I denna lösning har vi används något som kallas för Bayes lag (Bayes regel)

Bayes lag:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Oberoende

Definition: Två händelser A och B är oberoende om $P(A|B) = P(A)$ och $P(B|A) = P(B)$

Tal: Singla två slantar och låt

$A = \{$första singling ger H$\} = \{HH, HT\}$

$B = \{$andra singling ger H$\} = \{HH, TH\}$

A och B är intuitivt oberoende

Vi får

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(HH)}{P(HH, TH)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A)$$

På exakt samma sätt får vi att $P(B|A) = P(B)$.

Alltså är A och B oberoende enligt definitionen

Om A och B är oberoende så gäller att

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

vilket ger att

$$\boxed{P(A)P(B) = P(A \cap B)}$$

Tal: Kasta en tärning. Låt A vara händelsen att vi får fyra eller mindre och låt B vara händelsen att vi får udda. Är A och B oberoende?

L: Vi har $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$.

$P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ så $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Vi har ~~också~~ även att $A \cap B = \{1, 3\}$ så

$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

Eftersom $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ så är A och B oberoende!

Slumpvariabler (kap 4)

I denna kurs kommer vi att betrakta diskreta och kontinuerliga slumpvariabler. Vi kommer använda stora bokstäver, oftast X, Y och Z, för att beteckna ~~dessa~~ slumpvariabler.

En diskret slumpvariabel antar uppräkneligt antal värden, dvs alla värden kan skrivas upp i en lista $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

6

En kontinuerlig slumpvariabel kan anta kontinuerliga värden, t. ex inom ett interval $[0,1]$, eller $[0,\infty)$ eller $[2,10]$

I allmänhet tilldelar en slumpvariabel ett numeriskt värde till varje utfall av experimentet.

Ex 1: Vi kastar en tärning två gånger. Resultatet representeras av (a,b) där a är resultatet av första kastet och b är resultatet av andra kastet. Vi har då att

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,6)\}.$$

Låt X vara summan av tärningskasten, dvs

$$X = a + b$$

X kan anta värdena $\{2,3,4,\ldots,12\}$, alltså är X en diskret slumpvariabel.

Ex 2: Du ställer dig i kassakön på ICA. Låt T vara tiden tills du kommer fram till kassan.

T kan anta värdena 0, 0.23, π, e^5, etc.

I princip vilka positiva värden som helst!

Alltså är $S = [0,\infty)$ och T är en kontinuerlig slumpvariabel