Binomialfördelningen

Binomialfördelningen uppkommer i följande fall.

1) Ett experiment består av n identiska och <u>oberoende</u> försök.

2) Varje försök kan antingen lyckas eller misslyckas.

3) Sannolikheten att lyckas är samma i alla försök, och betecknas med p.

Om X är antalet lyckade försök så kommer X att vara binomialfördelad med parametrar n och p och vi skriver då $X \sim Bin(n, p)$

Ex: Du kastar en tärning 10 gånger och ~~Kta~~ räknar antalet gånger X du slår en sexa, då är $X \sim Bin(10, \frac{1}{6})$

Ex: Ett försäkringsbolag försäkrar hus. Hus brinner ner oberoende av varandra. Låt X vara antalet hus som brinner ner det kommande året. Då är $X \sim Bin(n, p)$ där n = antalet försäkrade hus och

p = sannolikheten att ett hus brinner ner det kommande året.

Vad är sannolikhetsfunktionen för en binomialförd. slumpvariabel?

1) Vilka värden kan X anta? $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$

2) Vad är $P(X=k)$ för $k = 0, 1, \ldots, n$?

Betrakta en fix sekvens av <u>k lyckade försök</u>

försök #	1	2	3	4	......	n-2	n-1	n	k st. l
lyckad/misslyckad	l	m	m	l		l	l	m	← n-k st. m
sannolikhet	p	1-p	1-p	p		p	p	1-p	

Sannolikheten att se exakt denna sekvens med k lyckade försök är

$$p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot p \cdots p \cdot p \cdot (1-p) = p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Men det finns många sekvenser av k lyckade och n-k misslyckade försök. Hur många?

Vi har n "platser" och ska placera ut k stycken "l", på hur många sätt kan vi göra detta? Svar: $\binom{n}{k}$

Slutsatsen blir att

$P(X=k) =$ (Antalet sekvenser med k lyckade försök) ×

× (sannolikheten för varje sådan sekvens) =

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Definition: X är binomialfördelad med parametrar n och p om

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{för } k=0,1,\dots,n$$

Ex: Du singlar en slant 10 gånger. Låt X vara antalet gånger du får krona, vad är ~~sannolikheten~~ $P(X=4)$?

L: X är binomialfördelad med parametrar $n=10$ och $p=0.5$, dvs $X \sim Bin(10, 0.5)$.

$$P(X=4) = \binom{10}{4} \cdot 0.5^4 \cdot (1-0.5)^6 = \binom{10}{4} 0.5^4 \cdot 0.5^6 = \binom{10}{4} 0.5^{10}$$

$$= \frac{10!}{4!\,6!} 0.5^{10} = \frac{10 \cdot 9^3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} \cdot 0.5^{10} =$$

$$= 10 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 0.5^{10} \approx 0.205$$

Naturlig fråga som kan dyka upp: om $X \sim Bin(n,p)$ vad är då $E(X)$ och $Var(X)$? Vi har att

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \text{(jobbigt ...)}$$

Vad händer om $n=1$?

$$E(X) = 0\binom{1}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^1 + 1\cdot\binom{1}{1}p^1\cdot(1-p)^0 =$$

$$= 0\cdot 1\cdot 1\cdot(1-p) + 1\cdot 1\cdot p\cdot 1 = 0+p = \underline{\underline{p}}$$

Vad händer om $n=2$?

$$E(X) = 0\cdot\binom{2}{0}p^0(1-p)^2 + 1\binom{2}{1}p^1(1-p)^1 + 2\cdot\binom{2}{2}p^2(1-p)^0 =$$

$$= 0 + 1\cdot 2\cdot p(1-p) + 2\cdot 1\cdot p^2\cdot 1 =$$

$$= 2p(1-p) + 2p^2 = 2p - 2p^2 + 2p^2 = \underline{\underline{2p}}$$

$n=3$?

$$E(X) = \ldots = \underline{\underline{3p}}$$

I allmänhet gäller att $E(X) = np$ om $X \sim Bin(n,p)$

Är detta rimligt? Ja, np = antal försök $\times$ sannolikhet att lyckas.

Tänk: Singla en slant 1000 ggr och låt X = antalet krona. Då är $X \sim Bin(1000, \frac{1}{2})$ och ~~$E(X)$~~

$E(X) = 1000\cdot\frac{1}{2} = 500$.

Det visar sig också att variansen är $Var(X) = np(1-p)$.

Alltså:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Om } X \sim Bin(n,p) \text{ så gäller att} \\ \quad E(X) = np \quad \text{och} \\ \quad Var(X) = np(1-p)\end{array}}$$

Tal: David jobbar på Folksam och dom försäkrar hus mot brand. Om sannolikheten att ett hus brinner upp är $p = 0.0001$ och Folksam har 1000 försäkrade hus, vad är sannolikheten att högst 2 av de försäkrade husen brinner upp?

L: Låt X vara antalet hus som brinner upp, då är $X \sim Bin(1000, 0.0001)$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0.9999^{1000} + 1000 \cdot 0.0001 \cdot 0.9999^{999} +$$

$$+ \frac{1000 \cdot 1001}{2} \cdot 0.0001^2 \cdot 0.9999^{998} =$$

$$= \ldots \approx 0.99984578$$

Detta funkar ~~men~~ att räkna på, men vad händer om $n = 1\,000\,000$ och vi vill veta $P(X \leq 35)$?

$$P(X \leq 35) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \ldots + \binom{n}{35} p^{35} (1-p)^{n-35}$$

Jobbigt! Då använder vi oss av Poissonfördelningen!

Poissonfördelningen uppkommer i liknande situationer som binomialfördelningen med n stort och p litet

Ex 1: Antal olyckor i en vägkorsning per månad.

(n = # bilar i korsningen, p = sannolikheten för olyckan)

Ex2: Antal Defekter hos nya bilar

(n = # nyproducerade bilar, p = sannolikhet för defekt)

Ex3: Antal försäkrade hus som brinner upp

(n = # försäkrade hus, ~~p = P(ett hus brinner upp)~~
p = P(ett hus brinner upp))

OBS: Det kan vara svårt att bedöma när vi ska använda Poissonfördelningen ~~istället~~ istället för binomialfördelningen. En tumregel är att $n \geq 20$ och $p < 0.05$.

Vad utmärker Poissonfördelningen?

1) Experimentet består av att räkna antalet händelser av en viss typ som sker under en viss tid / i en viss population / i en viss volym.

2) Sannolikheten att en händelse inträffar i ett visst tidsintervall (del av population / i en volymenhet) är samma som för andra tidsintervall av samma storlek.

3) Antalet händelser i ett visst tidsintervall (del av population / i en volymenhet) är oberoende av av antalet händelser i andra tidsintervall.

För att kunna göra beräkningar med Poissonfördelningen behöver vi sannolikhetsfunktionen.

Definition: X är Poissonfördelad med parameter $\lambda > 0$ om

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{för } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Vi skriver $X \sim Poi(\lambda)$ och det gäller att

$E(X) = \lambda$ och $Var(X) = \lambda$.

Anmärkning: Om vi använder Poissonfördelningen för att approximera binomialfördelningen så har vi att $\lambda = np$.