1 **Kontinuerlig likformig fördelning**

Antag att X kan anta ~~..~~ i ett intervall $[c,d]$

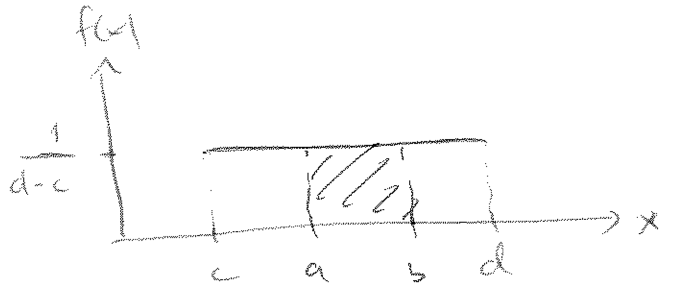
Om X "antar (alla) värden med lika stor sannolikhet"

är X likformigt fördelad på intervallet $[c,d]$.

Definition: En kontinuerlig slumpvariabel X är likformigt fördelad på intervallet $[c,d]$ om dess täthetsfunktion ges av

$$f(x) = \frac{1}{d-c} \qquad \text{för alla } x \in [c,d]$$

Täthetsfunktionen för en kontinuerligt likformig slumpvariabel ser alltså ut så här:



Vi skriver ibland $X \sim U[c,d]$ (U=Uniform).

Om $X \sim U[c,d]$ så gäller att

$$E(X) = \frac{c+d}{2} \quad \text{och}$$

$$Var(X) = \frac{(d-c)^2}{12}$$

Dessutom gäller ~~att~~ för värden a och b i intervallet [c, d] att

$$P(a < X < d) = \text{"bas gånger höjd"} =$$

$$= (b-a) \cdot \frac{1}{d-c} = \frac{b-a}{d-c},$$

detta använde vi förra gången!

Normalfördelningen (kap 5.3)

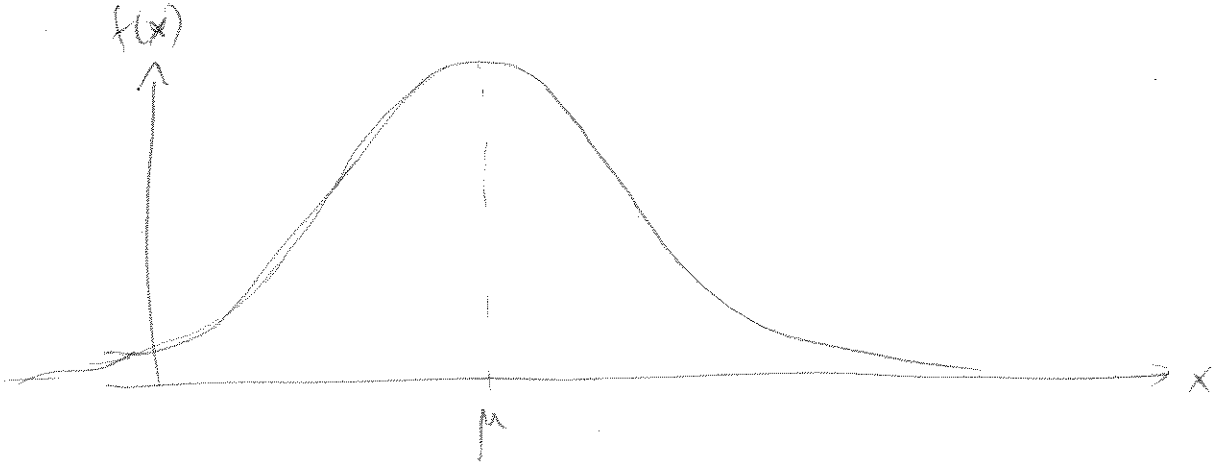
Definition: En ~~sta~~ kontinuerlig slumpvariabel X är normalfördelad med väntevärde μ och varians σ^2 om täthetsfunktionen är

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

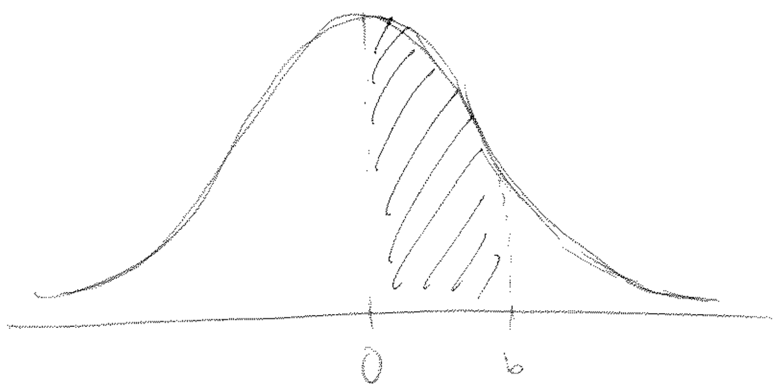
vi skriver då $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Täthetsfunktionen är helt hopplös att jobba med! Vi kommer istället att använda oss av tabeller.

...täthetsfunktionen ser ut så här:



Om $\mu = 0$ och $\sigma^2 = 1$, dvs om $X \sim N(0,1)$ så kallas X för standard normalfördelad och vi använder då ofta Z istället för X: $Z \sim N(0,1)$. Normalkurvan blir då centrerad kring 0.



OBS: Grafen är symmetrisk så $P(Z<0) = P(Z>0)$. Detta tillsammans med villkoret $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ ger att
$$P(Z<0) = P(Z>0) = \frac{1}{2}$$

Kom ihåg att för generella kontinuerliga slumpvariabler så har vi att $P(a < X < b)$ är lika med "arean under grafen mellan a och b". Detta gäller såklart även för normalfördelningen. Om $Z \sim N(0,1)$ så finns tabeller för $P(0 < Z < b)$ på hemsidan.

VISA TABELL!

Tal: Låt $Z \sim N(0,1)$ och beräkna

(a) $P(0 < Z < 1)$

(b) ~~$P(Z < ...)$~~ $P(Z < 1.37)$

(c) $P(Z > 2)$

L: (a) Vi tittar direkt i tabell IV i raden för 1.0 och kolumnen för .00 och vi ser alltså att

$$P(0 < Z < 1) = 0.3413$$

(b) Vi kan inte utläsa detta direkt från tabell IV. Så vad gör vi? Vi har att

$$P(Z < 1.37) = P(\{Z < 0\} \cup \{0 < Z < 1.37\}) =$$

$$= P(Z < 0) + P(0 < Z < 1.37)$$

Vi vet att $P(Z < 0) = \frac{1}{2} = 0.5$ och från tabell IV ser vi att $P(0 < Z < 1.37) = 0.4147$. Vi har alltså att

$$P(Z < 1.37) = 0.5 + 0.4147 = 0.9147.$$

(c) Här vill vi använda att $P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$. På samma sätt som i (b)-uppgiften ~~Här~~ vet vi att

$$P(Z < 2) = P(Z < 0) + P(0 < Z < 2) = 0.5 + P(0 < Z < 2)$$

Vi tittar i tabell IV och ser att $P(0 < Z < 2) = 0.4772$ så $P(Z < 2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$ och slutligen

$$P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

Vad gör vi om vi har en slumpvariabel som är normalfördelad men med andra parametrar?

Dvs vad gör vi med $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ om $\mu \neq 0$ eller $\sigma^2 \neq 1$? Vi har följande formel:

$$\boxed{\text{Om } X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ så gäller att } Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \text{ är normalfördelad med väntevärde 0 och varians 1, dvs } Z \sim N(0,1)}$$

Tal: Låt $X \sim N(1, 4)$ och beräkna

(a) $P(1 < X < 5)$

(b) $P(X < 3)$

L: (a) Vi vet att $Z = \frac{X-1}{2}$ är $N(0,1)$-fördelad.

Observera att händelsen

$$1 < X < 5$$

är samma som händelsen

$$\frac{1-1}{2} < \frac{X-1}{2} < \frac{5-1}{2}$$

och samma som händelsen

$$0 < Z < 2$$

Vi har alltså att

$$P(1 < X < 5) = P(0 < Z < 2)$$

Vi räknar ut detta på samma sätt som tidigare

$$P(1 < X < 5) = P(0 < Z < 2) = 0.4772$$

(b) Vi använder samma trick som i (a)-uppgiften.

$$P(X < 3) = P\left(\frac{X-1}{2} < \frac{3-1}{2}\right) = P(Z < 1) =$$

$$= P(Z < 0) + P(0 < Z < 1) = 0.5 + 0.3413 = 0.8413.$$