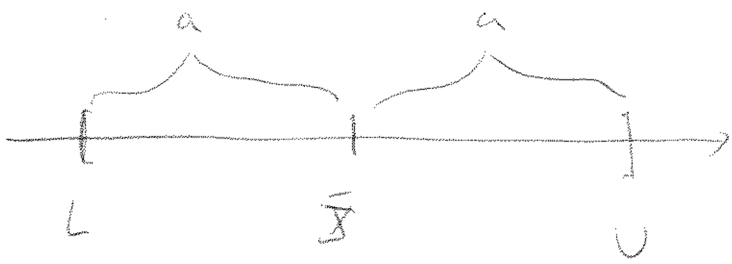
Konfidensintervall för ett väntevärde μ, när variansen är känd

Igår pratade vi om konfidensintervall: $[L, U]$, men hur tar vi fram L och U? Om det är ett väntevärde μ vi är intresserade av så var vår punktskattare och "bästa gissning" $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Tack vare detta är det naturligt att ha $\bar{X}$ i mitten av intervallet så $L = \bar{X} - a$ och $U = \bar{X} + a$ för något tal a.



Vi har då

$$0.95 = P(L \le \mu \le U) = P(\bar{X} - a \le \mu \le \bar{X} + a)$$

Observera att

$$\bar{X} - a \le \mu \iff \bar{X} \le \mu + a$$

och

$$\mu \le \bar{X} + a \iff \mu - a \le \bar{X}$$

vilket ger att

$$0.95 = P(\bar{X} - a \le \mu \le \bar{X} + a) = P(\mu - a \le \bar{X} \le \mu + a)$$

Nu kommer vi ihåg från igår att för en generell $N(\mu, \sigma^2)$-fördelad slumpvariabel X har vi att

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$$

I själva verket har vi att

$$P(\mu - 1.96\sigma \leq X \leq \mu + 1.96\sigma) = 0.95$$

Visa tabell!

Enligt CGS vet vi att $\bar{X} \approx N(\mu, \sigma^2_{\bar{X}})$ så vi har att $P(\mu - 1.96\sigma_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq \mu + 1.96\sigma_{\bar{X}}) = 0.95$.

Alltså vill vi att $a = 1.96\sigma_{\bar{X}} = 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ och därmed

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{och} \\ U &= \bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}}$$

Återigen så har vi ett före/efter perspektiv, så när vi har gjort en undersökning och tagit fram konfidens-intervallet så är det inte längre slumpmässigt. Det <u>observerade konfidensintervallet</u> betecknas då med $[l, u]$ och ges av

$$\boxed{\begin{aligned} l &= \bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ u &= \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}}$$

1a) : Vi har kastat tärning 100 gånger och antecknat resultaten: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, ..., $x_{100} = 4$. Det observerade medelvärdet blev $\bar{x} = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} x_k = 3.58$. Gör ett 95% KI för μ. (OBS. variansen för ett tärningskast: $\sigma^2 = \frac{35}{12}$)

L: Vi använder formlerna $l = \bar{x} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ och $u = \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Vi får då

$$l = 3.58 - 1.96 \cdot \frac{\sqrt{35/12}}{\sqrt{100}} = 3.2453$$

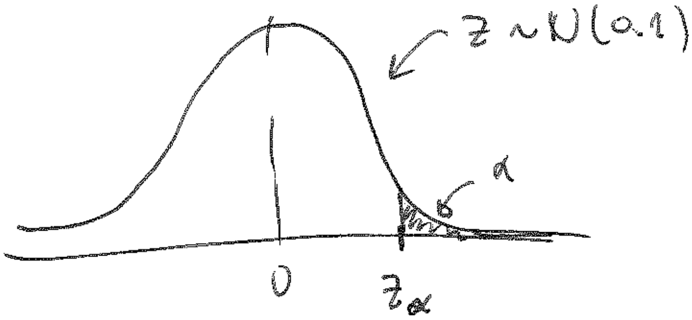
$$u = 3.58 + 1.96 \cdot \frac{\sqrt{35/12}}{\sqrt{100}} = 3.9147$$

Svar: Det observerade konfidensintervallet blev $[3.2453; 3.9147]$

Observera att dom inte använder notationen L, U, l, u, i boken!

Resonemangen hittills bygger på att $\bar{X}$ är normalfördelad. Detta stämmer om stickprovet $X_1, \dots, X_n$ kommer från en normalfördelning och/eller n är tillräckligt stort.

Hittills har vi använt signifikansnivå $\alpha = 0.05$ men det går bra att använda andra signifikansnivåer också. Man förknippar ofta ett "z-värde" med signifikansnivån. Värdet z_α definieras som det värde så att $\mathbb{P}(Z > z_\alpha) = \alpha$ där $Z \sim N(0,1)$.



Vi har t.ex. att $z_{0.025} = 1.96$, det är därför 1.96 dyker upp i härledningarna tidigare.

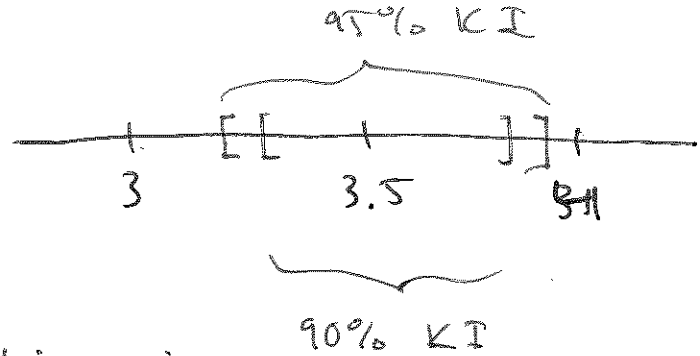
(Tabell 2, sid 316) ⑤

Konfidensgrad $100(1-\alpha)\%$	signifikansnivå α	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$
90%	0.1	0.5	1.645
95%	0.05	0.025	1.96
99%	0.01	0.005	2.575

Ex: Tärningsexemplet igen, denna gång med signifikansnivå $\alpha = 0.1$. Vi får då

$$l = \bar{x} - \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}} = 3.58 - 1.645 \cdot \frac{\sqrt{35/12}}{\sqrt{100}} = 3.2991$$

$$u = \bar{x} + \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}} = 3.58 + 1.645 \cdot \frac{\sqrt{35/12}}{\sqrt{100}} = 3.8609$$



Generellt sätt skriver vi: $L = \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $U = \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

~~Generellt sätt~~ Alltså, Ju lägre signifikansnivå (ju högre konfidensgrad) desto säkrare är vi på att intervallet täcker μ men intervallet blir då större, dvs mindre informativt.

Tabell 2 ger oss z-värden för några olika α.
Men hur gör vi med ~~generella~~ andra värden på α?
Det finns länk på kurshemsidan med mer fullständiga tabeller.

$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.95}{2} = 0.475$

$\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$\alpha = 0.1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$