Föreläsning 16/10

1

P-värde

Igår lärde vi oss att när man gör hypotestest vill man jämföra den observerade teststatistikan $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ med de kritiska värdena $\pm z_{\frac{\alpha}{2}}$. Man kan istället ta fram testets p-värde och jämföra med signifikansnivån α. ~~P-värdet kan tolkas som sannolikheten att observera~~ ~~Efter att vi observerat datan så tar p-värdet~~

Kom ihåg tolkningen av α: om $Z_1 \sim N(0,1)$ så gäller att

kritiskt värde

$$\alpha = \mathbb{P}(|Z_1| \geq z_{\frac{\alpha}{2}})$$ (om tvåsidigt)

$$\left(\alpha = \mathbb{P}(Z_1 \geq z_\alpha)\right)$$

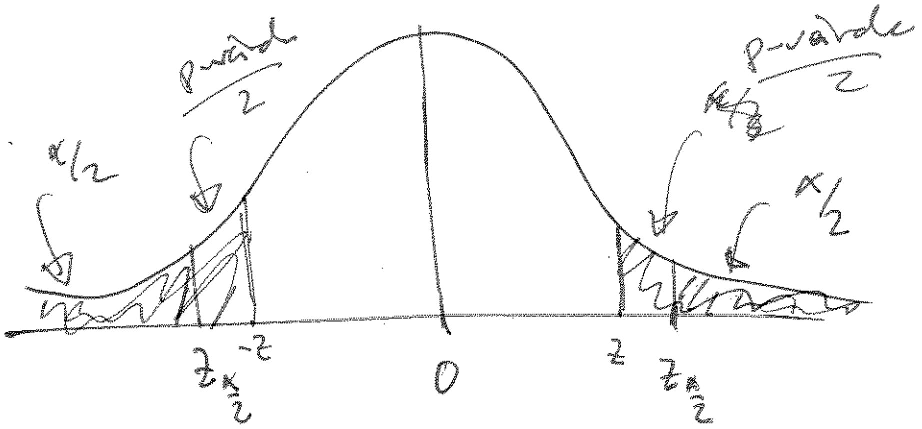
För att ta fram p-värdet måste vi först ta fram den observerade teststatistikan $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$. Då gäller att

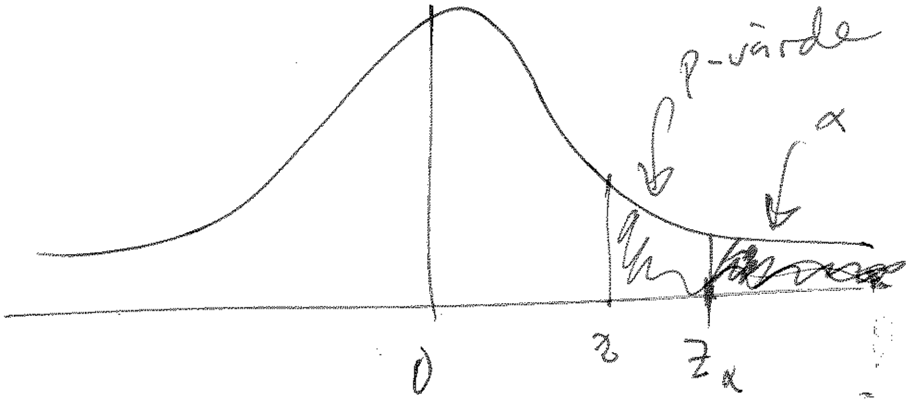
$$\text{p-värde} = \mathbb{P}(|Z_1| \geq z).$$

den observerade teststatistikan

Om p-värdet är mindre än signifikansnivån α så förkastar vi H_0 på nivå α, annars inte.

p-värde $< \alpha \iff$ ~~$z_{\frac{\alpha}{2}}$~~ z i den kritiska regionen.





P-värdet tar vi alltså fram med hjälp av tabellerna. P-värdet ger oss en mer precis bedömning av hur extrema vår data är om H_0 är sann. Dvs inte bara förkasta/ej förkasta.

OBS! I boken: p-värde (p-value) = "observed sign. level."

Typer av fel

Vi kan dra två olika slutsatser av ett hypotestest. Antingen förkastar vi H_0 eller så gör vi det inte. Verkligheten (sanningen) kan också vara på två sätt. Antingen är H_0 sann eller så är H_1 sann. Det finns alltså fyra olika utfall av ett hypotestest. I två av fallen har vi tagit rätt beslut men i två av fallen har vi tagit fel beslut.

Vi gör en tabell för att illustrera detta.

	H_0 sann	H_1 sann
Vi förkastar inte H_0	OK	$\boxed{\text{typ-II-fel}}$
Vi förkastar H_0	$\boxed{\text{typ-I-fel}}$	$\boxed{\text{OK}}$

Ett typ-I-fel begås när en sann nollhypotes förkastas. Vi tror då felaktigt att ~~en~~ H_0 är falsk. Ett typ-II-fel begås när vi inte förkastar en felaktig nollhypotes. Våra observationer talar inte starkt emot H_0, trots att H_0 är falsk.

Signifikansnivån α är sannolikheten att begå ett typ-I-fel. Sannolikheten att begå ett typ-II-fel brukar betecknas med β. <u>Styrkan</u> av ett test är sannolikheten att förkasta en falsk nollhypotes, alltså $1-\beta$. Sammanfattningsvis:

$$\alpha = P(\boxed{\text{typ-I-fel}})$$

$$\beta = P(\boxed{\text{typ-II-fel}})$$

$$1-\beta = P(\boxed{\text{Förkasta falsk nollhypotes}})$$

Vi vill givetvis att både α och β ska vara små. Men ju mindre α vi väljer desto större kommer β att vara. Man måste göra en avvägning. Det bästa sättet att få både α och β små är att ha ett stort stickprov!

(4) Kom ihåg att vi väljer α innan undersökningen så vi vet α. Däremot går det aldrig (i praktiken) att räkna ut β eftersom vi inte vet värdet på parametern, (μ t. ex.) när H_1 är sann.

Övning 56. I en artikel påstås att medelåldern hos amerikaner som köper produkter via TV-shop är 51 år. Anta att du vill testa nollhypotesen med ett stickprov av storlek $n=50$.

$\underbrace{\text{nollhypotesen}}_{(H_0: \mu = 51)}$

(a) Hitta p-värdet om testet är tvåsidigt, $\bar{x} = 52.3$ och $s = 7.1$

(b) Hitta p-värdet om $H_1: \mu > 51$, $\bar{x} = 52.3$ och $s = 7.1$

(c) Hitta p-värdet om testet är tvåsidigt, $\bar{x} = 52.3$ och $s = 10.4$.

Lösning: Eftersom $n = 50$ är stort nog för att vi ska kunna använda centrala gränsvärdessatsen så vet vi att teststatistikan

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad \text{är normalfördelad.}$$

(a) $$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{52.3 - 51}{7.1/\sqrt{50}} = 1.29$$

Tabellvärdet är 0.4015

$0.5 - 0.4015 = 0.0985$

p-värde $= 2 \cdot 0.0985 = 0.1970$

(b) Observerade teststatistikan exakt samma som i (a): $z = 1.29$

p-värde $= 0.0985$

Lösn (c) I detta fall blir vår observerade teststatistiken

$$z = \frac{52.3 - 51}{10.4/\sqrt{50}} = 0.88$$

Tabellvärdet är då 0.3106

~~0.5 + 0.3106 = 0.8106~~

$$0.5 - 0.3106 = 0.1894$$

~~p-värde~~

~~p-värde = $\frac{0.1894}{2}$ = 0.0947~~

~~p-värde = 2·0.0947 = 0.~~

p-värde = $2 \cdot 0.1894 = 0.3788$