Projekt MVE490 Del 1

Det är tillåtet att sammarbeta, men alla lösningar **skall** lämnas in individuellt.

Sista inlämningsdag är 4de oktober på föreläsningen. Det är ok att lämna in elektroniskt genom att maila till simonssi 'at' chalmers.se. OBS! Alla elektroniskt inlämnade uppgifter måste vara skrivna i en texteditor (word, latex, etc). Inscannad handskriven text rättas ej!!!

Glöm inte att motivera era svar! Svar utan motivering ger 0 poäng! Glöm ej heller att skriva namn och personnummer.

Denna deluppgift kan ge högst 2.5 bonuspoäng till tentan med följande gränser:

Poäng	Bonus
0-8	0
9-13	0.5
14-19	1
20-25	1.5
26-31	2.0
32-36	2.5

1. Du slår en tärning två gånger. Låt A vara händelsen att det första kastet blir en sexa och låt B vara händelsen att summan av kasten blir sju.

   (a) Beräkna $P(A \cap B)$. (3p)

   Lösning: Om vi betecknar becknar utfallen med (x, y) där x är resultatet av första kastet och y är resultatet av andra kastet så har vi att

   $$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

   och

   $$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}.$$

   Händelsen $A \cap B$ är alltså alla utfall som ligger i både A och B, vilket endast är utfallet $(6,1)$. Det totala antalet utfall är 36 och med divisionsregeln får vi att

   $$P(A \cap B) = \frac{\text{antalet utfall i } A \cap B}{\text{antalet utfall totalt}} = \frac{1}{36}.$$

   (b) Är A och B oberoende? (3p)

   Lösning: Om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ så är A och B oberoende. I a-uppgiften räknade vi ut $P(A \cap B)$ så för att ta reda på om de är oberoende så vill vi ta read på $P(A)$ och $P(B)$. Ovan så räknade vi upp alla utfall i både A och B så vi kan använda divisionsregeln igen:

   $$P(A) = \frac{\text{antalet utfall i } A}{\text{antalet utfall totalt}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{\text{antalet utfall i } B}{\text{antalet utfall totalt}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Eftersom $P(A)P(B) = (1/6) * (1/6) = 1/36 = P(A \cap B)$ så är A och B oberoende.

(c) Beräkna $P(A \cup B)$. (2p)

Lösning: Vi känner till formeln

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Vi använder det vi har tagit fram i a- och b-uppgiften:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

2. Låt X vara en diskret slumpvariabel som kan anta värdena 2, 4, 6 och 8. Sannolikhetsfunktionen ges av $P(X = k) = c/k$ där c är en konstant.

(a) Bestäm värdet på konstanten c. (2p)

Lösning: För att det ska vara en sannolikhetsfunktion så måste summan av alla sannolikheter att vara 1. Vi får då

$$\begin{aligned}1 &= \sum P(X = k) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) \\ &= \frac{c}{2} + \frac{c}{4} + \frac{c}{6} + \frac{c}{8} = c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) = c\frac{12 + 6 + 4 + 3}{24} = c\frac{25}{24}\end{aligned}$$

vilket ger att $c = 24/25$

(b) Beräkna $E(X)$. (3p)

Lösning: Vi har att

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum kP(X = k) = 2P(X = 2) + 4P(X = 4) + 6P(X = 6) + 8P(X = 8) \\ &= 2\frac{c}{2} + 4\frac{c}{4} + 6\frac{c}{6} + 8\frac{c}{8} = c + c + c + c = 4c = 4\frac{24}{25} = \frac{96}{25} = 3.84\end{aligned}$$

(c) Låt $Y = X^2$ och beräkna $E(Y)$. (3p)

Lösning: Vi har att

$$\begin{aligned}E(Y) &= E(X^2) = \sum k^2 P(X = k) \\ &= 2^2 P(X = 2) + 4^2 P(X = 4) + 6^2 P(X = 6) + 8^2 P(X = 8) \\ &= 2^2\frac{c}{2} + 4^2\frac{c}{4} + 6^2\frac{c}{6} + 8^2\frac{c}{8} = 2c + 4c + 6c + 8c = 20c = 20\frac{24}{25} = \frac{480}{25} = 19.2\end{aligned}$$

(d) Beräkna $Var(X)$. (2p)

Lösning: Vi har att $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Från (b) vet vi att $E(X) = 3.84$ och från (c) vet vi att $E(X^2) = 19.2$. Vi har då alltså att

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 19.2 - 3.84^2 \approx 4.45$$

3. David jobbar på ett försäkringbolag och har ansvar över brandförsäkringar. Han har försäkrat 4500 hus mot brand och varje hus har en sannolikhet 0.0003 för att brinna ner under ett år. Anta att husen brinner ner oberoende av varandra.

   (a) Låt X vara antalet hus som brinner ner under ett år, vad har X för fördelning? (2p)

   Lösning: Så det är $n = 4500$ hus som brinner ner med sannolikhet $p = 0.0003$ oberoende av varandra och X är hur många av dessa hus som brinner ner under ett år. Kriterierna för binomialfördelningen är uppfyllda så vi har att $X \sim Bin(4500, 0.0003)$.

   Eftersom n är så stort och p är så litet så kan vi approximera denna binomialfördelning emd Poissonfördelningen. Det är ok att svara med Poissonfördelningen men i så fall måste man först argumentera för att det är en binomialfördelning från början!

   Om man inte nämner parametrarna i svaret så får man avdrag.

   (b) Beräkna sannolikheten att åtminstone två hus brinner ner under ett år. (3p)

   Lösning: Vi är alltså intresserade av $P(X \geq 2)$. Vi har att

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1).$$

   Eftersom n är väldigt stort och p är väldigt litet så kan vi använda oss av Poissonfördelning. Så X är ungefär Poissonfördelad med parameter $\lambda = np = 4500 * 0.0003 = 1.35$. Vi vet att sannolikhetsfunktionen för en Poissonfördelad variabel är

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

   så vi har alltså att

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\
&= 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} \\
&= 1 - \frac{1}{1} e^{-1.35} - \frac{1.35}{1} e^{-1.35} \\
&= 1 - e^{-1.35} - 1.35 e^{-1.35} \\
&\approx 1 - 0.2592 - 0.3500 \\
&= 0.3908
\end{aligned}$$

   Man kan också använda sig direkt av binomialfördelningen utan att använda Poissonapproximationen

   (c) Låt oss undersöka vad som kan hända i det längre perspektivet. Under en tioårsperiod, låt Y beteckna antalet år under denna period då åtminstone två hus har brunnit ner. Vi kan anta att antal hus som brinner ner är obereonde mellan åren. Vad har Y för fördelning? (3p)

Lösning: Enligt 3b så är sannolikheten 0.3908 att fler än två hus brinner ner under ett år. Eftersom husbrinnandet kan antas vara oberoende mellan åren så är Y binomialfördelad med $n = 10$ och $p = 0.3908$, alltså $Y \sim Bin(10, 0.3908)$.

(d) Under denna tioårsperiod, beräkna sannolikheten att vi max en gång upplever ett år där det brinner ner åtminstone två hus. (3p)

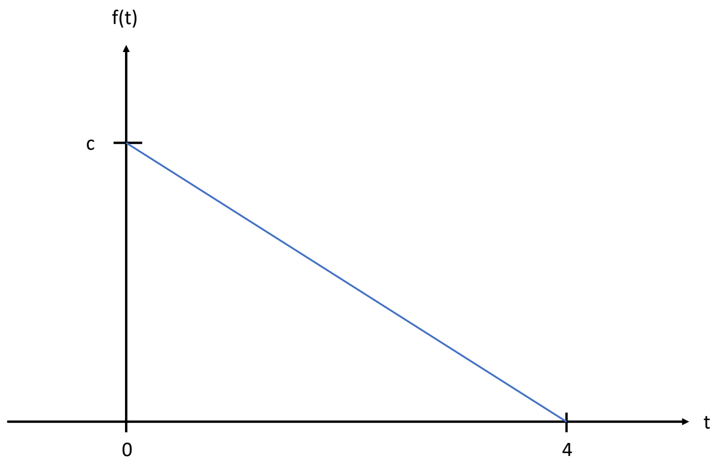
Lösning: Vi vill alltså veta $P(Y \leq 1)$. Eftersom $Y \sim Bin(10, 0.3908)$ så vet vi att Y har sannolikhetsfunktion

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{k} 0.3908^k (1 - 0.3908)^{10-k}.$$

Vi har alltså att

$$\begin{aligned} P(Y \leq 1) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) \\ &= \binom{10}{0} 0.3908^0 (1 - 3908)^{10-0} + \binom{10}{1} 0.3908^1 (1 - 3908)^{10-1} \\ &= 0.6092^{10} + 10 \times 0.3908 \times 0.6092^9 \\ &\approx 0.0522 \end{aligned}$$

4. Stefan har problem med sitt bredband och ringer därför till kundsupporten. När han ställs i telefonkön så kan tiden T (i minuter) tills han blir betjänad beskrivas som en kontinuerlig slumpvariabel vars täthetsfunktion $f(t)$ illustreras i figuren nedan.



(a) Bestäm värdet på konstanten c. (3p)

Lösning: För att det ska vara en täthetsfunktion för en slumpvariabel så måste vi ha att $\int_0^4 f(t)dt = 1$, dvs arean under grafen måste vara lika med 1. Arean av en triangel är basen*höjden/2. Triangeln i figuren har bas=4 och höjd=c, så vi har att

$$\text{Area} = \frac{4c}{2}.$$

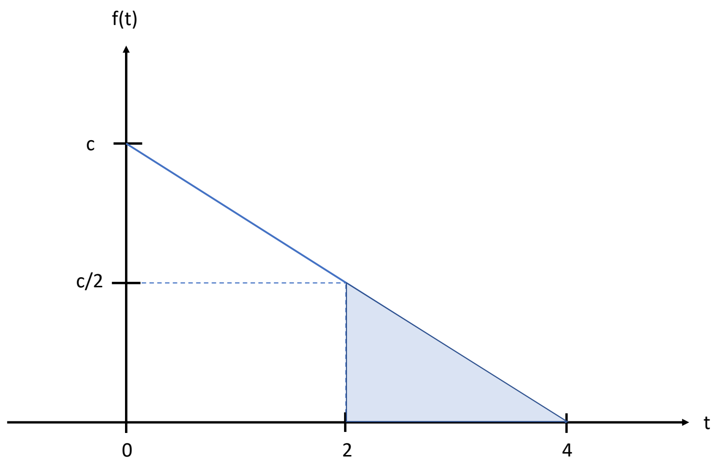
Så om arean ska bli lika med 1 så måste vi ha att $c = 2/4 = 1/2$.

(b) Vad är sannolikheten att Stefan måste vänta längre än två minuter i telefonkön innan han blir betjänad? (4p)

Lösning: Sannolikheten att en kontinuerlig slumpvariabel T med täthetsfunktion $f(t)$ hamnar inom ett intervall $[a, b]$ är lika med integralen

$$\int_a^b f(t)dt,$$

dvs arean under grafen mellan a och b. I vårt fall är vi intresserade av sannolikheten att vår slumpvariabel är större än 2, vilket är lika med arean under grafen mellan 2 och 4. I figuren nedan är denna area skuggad med ljusblått.



Eftersom punkten 2 delar vårt intervall $[0, 4]$ på mitten så måste höjden på den ljusblå triangeln vara den punkt som delar höjden av grafen på mitten, dvs $c/2 = 1/4$. Arean på den ljublå triangeln blir därför

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \times \text{höjden}}{2} = \frac{(4-2) \times 1/4}{2} = \frac{1}{4}$$

vilket är sannoliheten vi söker.

Man kan även ta fram formeln för täthetsfunktion genom att använda räta linjens ekvation: $y = kx + m$. Om man gjort detta så kan man lätt ta fram arean av den blå triangeln.