

Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik med Metoder MVE490**

Tid: 21 december 2017

Examinatorer: Erik Broman.

Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, egenhändigt skriven formelsamling om två A4 fram och bak (dvs 4 sidor), samt utdelade tabeller.

Tentamen består av 8 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

betyg "3": 20 till 29

betyg "4": 30 till 39 poäng

betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad

1. Alexandra åker till Nya Zeeland. Väl där blir hon attackerad av en aggressiv Kiwi-fågel. Vi kan anta att antalet anfall innan Kiwi-fågeln ger upp är Poisson-fördelat med parameter $\lambda = 4/3$.
 - (a) Vad är sannolikheten att Alexandra blir utsatt för högst tre anfall? (2p)
 - (b) Givet att Alexandra blir utsatt för minst två anfall, vad blir nu sannolikheten att hon blir utsatt för högst tre anfall? (2p)
 - (c) Antag att Alexandra blir attackerad av 100 Kiwi fåglar och att varje fågel attackerar oberoende av varandra. Antag också att varje Kiwi-fågel anfäller ett Poisson-fördelat antal gånger med $\lambda = 4/3$. Beräkna (approximativt) sannolikheten att Alexandra får utstå minst 150 anfall. (3p)

2. Antag att X är likformigt fördelad på talen $1, 2, \dots, 10$ (dvs $X \sim U(\{1, 2, \dots, 10\})$), medans Y är likformigt fördelad på talen $1, 2, \dots, 6$ (dvs $Y \sim U(\{1, 2, \dots, 6\})$). Antag även att X och Y är oberoende.
 - (a) Vad är sannolikheten att $X + Y$ blir minst 4? (2p)
 - (b) Vad blir $E[2X + Y]$? (2p)
 - (c) Låt Z vara likformigt fördelad på talen $101, 102, \dots, 110$ (dvs $Z \sim U(\{101, 102, \dots, 110\})$). Ordna varianserna av X, Y och Z i storleksordning. (OBS: Om man löser talet med räkningar får man full poäng. Om man istället löser talet med ett korrekt och fullständigt resonemang får man också full poäng) (2p)

3. Låt A, B var två händelser med sannolikheter $\mathbb{P}(A) = 1/4$ och $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

- (a) Beräkna $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cap B^c)$ och $\mathbb{P}(A|B)$ om $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/5$. (2p)
- (b) Beräkna $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cap B^c)$ och $\mathbb{P}(A|B)$ om A, B är oberoende. (2p)
- (c) Beräkna $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cap B^c)$ och $\mathbb{P}(A|B)$ om A, B är disjunkta. (2p)
4. Försäkringsbolaget Hans Trygga nishar sig på två typer av försäkringar, nämligen brandförsäkringar och stöldförsäkringar. Bolaget har 12300 försäkringstagare för brandförsäkringarna och 23800 försäkringstagare för stöldförsäkringarna. Utgifterna för dessa försäkringar (dvs ersättningar till kunder som råkat ut för brand respektive stölder) anses vara oberoende och normalfördelade med parametrar $\mu_b = 60$ MSEK (dvs 60 miljoner kronor) och $\sigma_b^2 = 200$ för brandförsäkringarna samt $\mu_s = 23$ MSEK och $\sigma_s^2 = 54$ för stöldförsäkringarna.
- (a) Om de sammanlagda försäkringspremierna för brandförsäkringarna uppgår till 70 MSEK, hur stor är sannolikheten att Hans Trygga går med vinst på brandförsäkringarna? (2p)
- (b) Hur mycket måste Hans Trygga minst få för stöldförsäkringspremierna för att sannolikheten att de skall gå med vinst skall vara åtminstone 0.9? (2p)
- (c) Hans Tryggas sammanlagda tillgångar uppgår till 112 MSEK efter att alla försäkringspremier har betalats in. Om de sammanlagda utbetalningarna för stöld och brand överstiger detta belopp går Hans Trygga i konkurs. Beräkna sannolikheten för att detta inträffar. (2p)
5. Tet är intresserad av att undersöka hur stor andel av studenterna på Chalmers som är vegetarianer. Hen gör en undersökning genom att fråga 150 personer på campus.
- (a) Tet hoppas att stickprovet ska vara stort nog för att ett 95%-konfidensintervall ska bli högst 0.1 långt (dvs sträcka sig högst 0.05 åt varje håll från punktskattningen). Är detta säkerställt, dvs hur många personer behöver tillfrågas för att det ska vara helt säkert att konfidensintervallets längd blir högst 0.1? (3p)
- (b) När Tet genomför sin undersökning svarar 28 utav de 150 tillfrågade att de är vegetarianer. Konstruera ett 95% konfidensintervall för det sanna andelen vegetarianer på Chalmers utifrån datan Tet samlat in. (2p)
- (c) Vilket/vilka villkor behöver vara uppfyllt för att konfidensintervallet i b) ska vara giltigt? Verkar detta vara uppfyllt? (1p)
6. Sten-Åke livnär sig på att tillverka tegel, och har precis fått en ny tegelstensmaskin till sin fabrik. En fördel med den nya maskinen är att vikten varierar mindre mellan stenarna – den gamla maskinen tillverkade stenar med en vikt som hade

en standardavvikelse på 0.5 kg, medan den för den nya maskinen bara är 0.25 kg. Men Sten-Åke misstänker att den nya maskinen även gör lättare stenar. Han väger därför 35 stenar från den nya maskingen, och 37 som var tillverkade i den gamla. Nedan är en sammanfattning av vikterna. Låt x beteckna stickprovet av stenar från den gamla maskinen och y stickprovet från den nya maskinen.

Gamla	Nya
$n_X = 37$	$n_Y = 35$
$\sum x_i = 119.2$	$\sum y_i = 104.1$
$\sum x_i^2 = 391.2$	$\sum y_i^2 = 311.6$

Sten-Åke tycker inte resultatet är tydligt nog, utan vill ha hjälp av dig med en statistisk analys.

- (a) Formulera hypoteser och gör ett hypotestest vid signifikansnivå 1%. Verkar Sten-Åke ha rätt i sina misstankar? (4p)
- (b) Sten-Åke förstår inte vad du menar med "signifikansnivå". Hur skulle du förklara för Sten-Åke vad det innebär att signifikansnivån är 1%? (2p)
7. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Svara utan motivering! Varje rätt svar ger 1 poäng men varje fel svar ger -1 poäng. Inget svar ger 0 poäng. Totalt ger uppgiften som sämst 0 poäng. Tänk igenom varje svar ordentligt!
- (a) Om X_1, \dots, X_n är ett stickprov från en fördelning så är \bar{X} en väntevärdesriktig skattare för fördelningens väntevärde.
- (b) Om X_1, \dots, X_n är ett stickprov från en fördelning så är s^2 en väntevärdesriktig skattare för fördelningens standardavvikelse.
- (c) Om X_1, \dots, X_n är ett stickprov från en fördelning och om n är stort nog så säger Centrala gränsvärdesatsen att stickprovet är approximativt normalfördelat.
- (d) Ju högre signifikansnivå desto större är den kritiska regionen.
- (e) Sannolikheten att göra ett typ-II-fel är alltid större än sannolikheten att göra ett typ-I-fel.
- (f) Om vi tar ett stickprov från en $N(0, 1)$ -fördelning så kommer ungefär 95% av observationerna att ligga mellan -1.96 och 1.96.
- (g) Om p-värdet är mindre än signifikansnivån så förkastar vi nollhypotesen.
- (h) Medelvärde, median och typvärde är exempel på spridningsmått.

8. Anna har samlat in en del data från en intressant studie. Som ett första steg i att analysera stickprovet har hon skapat en boxplot med hjälp av ett lämpligt datorprogram. I bilden nedan kan du se denna boxplot.
- (a) Förklara för Anna hur man kan få fram medianen och kvartilavståndet för ett stickprov genom att titta i boxploten. Ungefär vad är medianen och kvartilavståndet för detta stickprov? (3p)
- (b) Förklara för Anna hur en boxplot för ett skevt stickprov ser ut. Skulle du säga att detta stickprov är skevt? (2p)

