

Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik med Metoder MVE490**

Tid: 21 oktober 2017

Examinatorer: Erik Broman.

Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, egenhändigt skriven formelsamling om två A4 fram och bak (dvs 4 sidor), samt utdelade tabeller.

Tentamen består av 8 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

betyg "3": 20 till 29

betyg "4": 30 till 39 poäng

betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad

1. I ett lotteri finns det N lotter, där N är ett mycket stort tal. Sannolikheten att en given lott ger vinst är p .
 - (a) Sara köper 12 lotter och låter X vara antalet vinster av dessa 12. Hon antar att X är binomialfördelad. Vilka antaganden måste Sara göra för att detta skall stämma? Är dessa antaganden rimliga? Vilka är parametrarna? (2p)
 - (b) Om $N = 20000$ och $p = 0.1$, beräkna $\mathbb{P}(X = 3)$ där X är som i uppgift (a). (2p)
 - (c) I ett annat lotteri är p istället 0.005. Torkel köper $n = 1000$ lotter. Om $Y = \#$ vinster av dessa 1000 lotter, beräkna $\mathbb{P}(Y \leq 3)$ och ange svaret med tre värdesiffror. (2p)
2. Kalle har två vanliga sexsidiga tärningar och kastar båda.
 - (a) Låt A vara händelsen att summan av resultaten är högst fem. Vad blir $\mathbb{P}(A)$? (2p)
 - (b) Låt B vara händelsen att summan av resultaten är ett udda tal. Vad blir $\mathbb{P}(B)$? (2p)
 - (c) Är A, B oberoende? (2p)
3. Hummerpremiären brukar ge höga priset vid årets första hummerauktion. Hummerrarna säljs vid detta första tillfälle individuellt, och kilopriset för hummer kan anses vara normalfördelat med parametrar $\mu = 1000$ och $\sigma^2 = 2500$.
 - (a) Vad är sannolikheten att hummerpriset överstiger 1150 kronor? (2p)

- (b) Jöns-Harald har fiskat upp en hummer som väger 6.3 kilo, vad är sannolikheten att Jöns-Harald får mer än 6000 kronor för sin hummer? (2p)
- (c) Mr Bakos har en hummer som väger 4.6 kilo och en exklusiv bläckfisk som väger 5.4 kilo. Kilopriset för bläckfisken kan antas följa en normalfördelning med väntevärde 600 och varians på 1100 kronor (även en exklusiv bläckfisk är mindre värd än en hummer). Om priserna är oberoende, vilken fördelning har den totala summan pengar som Mr Bakos får vid försäljning av hummern och bläckfisken? (2p)
4. Låt X vara en slumpvariabel som kan anta värdena $-1, 3, 4$ och 6 där sannolikheterna anges i följande tabell.

k	-1	3	4	6
$\mathbb{P}(X = k)$	0.2	0.3	0.4	0.1

- (a) Beräkna väntevärde och varians av X . (2p)
- (b) Låt X_1, X_2, X_3, X_4 och X_5 vara oberoende slumpvariabler som alla har samma fördelning som X . Beräkna väntevärde och varians för summan $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. Beräkna även väntevärde och varians för $X_1 - X_2$. (3p)
- (c) Låt nu X_1, \dots, X_{30} vara oberoende slumpvariabler som alla har samma fördelning som X . Beräkna $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{30} X_k \geq 90\right)$. (2p)
5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Svara utan motivering! Varje rätt svar ger 1 poäng men varje fel svar ger -1 poäng. Inget svar ger 0 poäng. Totalt ger uppgiften som sämst 0 poäng.
- (a) Om p-värdet är mindre än det kritiska värdet så förkastar man nollhypotesen.
- (b) Om X_1, \dots, X_n är ett stickprov från en fördelning med varians σ^2 så är variansen av medelvärdet lika med σ^2/n .
- (c) Avståndet från den nedre kvartilen till medianen är alltid samma som avståndet från medianen till den övre kvartilen.
- (d) Kvalitativ data kan illustreras med en boxplot.
- (e) Om X är $N(0, 1)$ -fördelad och Y är t -fördelad med 10 frihetsgrader så gäller att $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.
- (f) P-värdet är sannolikheten att nollhypotesen är sann.
- (g) Ju högre signifikansnivå desto större är sannolikheten att vi förkastar nollhypotesen.
- (h) Om vi skapar ett konfidensintervall för ett väntevärde så är det samma väntevärdet alltid i mitten av intervallet.

6. Egon och Lisa har två stickprov, X_1, \dots, X_n respektive Y_1, \dots, Y_n , av samma storlek från en fördelning med väntevärde μ och varians σ^2 , och är intresserade av att skatta μ . Egon föreslår att de bara ska ta hans stickprov och använda $\hat{\mu} = \bar{X}$ som skattare. Lisa, däremot, föreslår att dom ska mötas på hälften och istället använda $\hat{\mu} = \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}$.
- (a) Visa att Lisas förslag också ger en väntevärdesriktig skattare. (3p)
 - (b) Vilken skattare skulle du säga är bäst? Motivera. (3p)
7. I Sverige genomförs varje månad opinionsundersökningar av ett antal institut. I dessa undersökningar intervjuar man personer och ställer frågan "Vilket parti skulle du rösta på om det var riksdagsval idag?". I senaste riksdagsvalet (2014) fick Vänsterpartiet (V) 5.72 % av rösterna, men i Aftonbladets senaste väljarbarometer svarade 134 av 2066 tillfrågade personer att de skulle rösta på (V).
- (a) Ställ upp hypoteser för att testa om andelen som skulle rösta på (V) är högre idag än vid riksdagsvalet 2014, beräkna teststatistikan och p -värdet för testet. (Vi antar att valresultatet 2014 gav den sanna andelen av befolkningen som röstade på (V) vid den tidpunkten). (3p)
 - (b) Testa hypotesen i (a) vid signifikansnivå $\alpha = 0.1$. Vilken blir slutsatsen? (2p)
 - (c) Vilken typ av fel riskerar du att göra när du drar slutsatsen i (b)? (1p)
8. Simon vill jämföra väntevärdena hos två normalfördelade populationer med lika stora varianser. Till sin hjälp har han två oberoende stickprov (ett från vardera population) av storlek $n_1 = 12$ och $n_2 = 15$. Han har också räknat ut punktskattningarna för väntevärdet och variansen från de två stickproven: $\bar{x} = 24.3$, $\bar{y} = 26.4$, $s_X^2 = 2.3$ och $s_Y^2 = 2.9$.
- (a) Hjälp Simon att göra ett 95%-igt konfidensintervall för skillnaden mellan populationernas sanna väntevärden. (4p)
 - (b) Simon är inte riktigt nöjd med konfidensintervallet du tar fram. Han säger "bättre att ta det säkra före det osäkra" och vill sedan göra ett 99.99%-igt konfidensintervall istället. "Då kan vi ju vara nästan helt säkra på att skillnaden mellan de sanna väntevärdena ligger i det nya konfidensintervallet!" Förklara för Simon varför detta kanske inte är en bra idé. (1p)