10. Jämförelse av två väntevärden

10.1 Punktskattning

Man har två populationer och man vill jämföra deras väntevärden (som är okända). Population 1 har väntevärde μ_1 och population 2 väntevärde μ_2. Vi tar oberoende stickprov av de två populationerna, ett stickprov med medelvärde $\bar{X}_1$ från population 1 och ett stickprov med medelvärde $\bar{X}_2$ från population 2. Man kan skatta differensen $\mu_1 - \mu_2$ med $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, vilket är en väntevärdesriktig skattning för $\mu_1 - \mu_2$.

Ex. 10.1.1: Jämför tiden det tar att inspektera elinstallationer av två olika slags strömbrytare, vakuumtyp strömbrytare (X_1) och magnetisk strömbrytare (X_2). Man tar ett stickprov från vardera population och mäter inspektionstiderna av var och en strömbrytare. Vad är skillnaden mellan de två genomsnittliga inspektionstiderna? (Data: $\bar{x}_1 = 5.78$min och $\bar{x}_2 = 9.96$min)

För att kunna intervallskatta $\mu_1 - \mu_2$ eller testa hypoteser angående skillnaden, måste man veta fördelningen för skattningen $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$. Om $\bar{X}_1$ och $\bar{X}_2$ är stickprovsmedelvärden av två **oberoende** stickprov av resp. storlekar n_1 och n_2 från resp. $N(\mu_1, \sigma_1)$ och $N(\mu_2, \sigma_2)$, är

$$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1/\sqrt{n_1}), \quad \bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2/\sqrt{n_2})$$

och

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}).$$

10.3 Jämförelse av två väntevärden

Nu antar man att varianserna av de två populationerna är lika, dvs att $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ är en väntevärdesriktig skattning för $\mu_1 - \mu_2$ och

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)}.$$

Då är

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

Men vanligen känner man inte σ^2 (eller σ) och man måste skatta den. Man kan skatta

$$\hat{\sigma}_1^2 = S_1^2 \text{ och } \hat{\sigma}_2^2 = S_2^2.$$

Nu är $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ och man har två skattningar för σ^2, nämligen S_1^2 och S_2^2. Man vill ha bara en skattning men använda både två. Därför använder man

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

som en skattning för σ^2 (ett viktat medelvärde av S_1^2 och S_2^2).

Obs! Viktena är $n_1 - 1$ och $n_2 - 1$ (inte n_1 och n_2) därför att då blir

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$T_{n_1+n_2-2}$-fördelad.

$100(1-\alpha)\%$ **konfidensintervall** för $\mu_1 - \mu_2$ blir

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$$

där $t_{\frac{\alpha}{2}}$ hittar man genom att använda $T_{n_1+n_2-2}$-fördelningen.

Ex.10.3.2: Man jämför hur mycket diversarbetare var utsatta för radioaktivitet i 1973 ($n_1 = 16$, $\bar{x}_1 = 0.94$rem och $S_1^2 = 0.040$) och i 1979 ($n_2 = 16$, $\bar{x}_2 = 0.62$rem och $S_2^2 = 0.028$). Man har två oberoende stickprov, ett från 1973 och ett från 1979. Man antar att varianserna av de två populationerna är lika stora och vill hitta 95% konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$.

För att **testa hypotesen** $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ mot en av de möjliga alternativen, $H_0 : \mu_1 > \mu_2$, $H_0 : \mu_1 < \mu_2$ eller $H_0 : \mu_1 \neq \mu_2$, kan man använda

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

som en teststatistika. Den har $T_{n_1+n_2-2}$-fördelning om H_0 är sann.

Ex.10.3.3: Man jämför hållbarheten av järn i två olika temperatur, 1450F ($n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 18900$psi och $S_1^2 = 1600$) och 1650F ($n_2 = 16$, $\bar{x}_2 = 17500$psi och $S_2^2 = 2500$). Man tror att hållbarheten är lägre i den högre temperaturen. Är det så?

Obs! Om varianserna inte kan antas vara lika, skattar man $Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ med $\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$ och använder teststatitikan

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}},$$

som också är T-fördelad, men antal frihetsgrader är inte samma som tidigare.

10.5 Jämförelse av väntevärden: ett parvist test

Ex: Reducering av blodcirkulationen i hjärnan antas orsaka mental försämring bland äldre personer. Man gjorde en undersökning för att ta reda på om ett visst läkemedel kan stimulera blodcirkulationen i hjärnan och fördröja mental försämring. Elva personer fick läkemedel under flera dagar. Blodcirkulationstiden mättes innan (X) studien började och efter (Y) den var över.

Data:

Person	Innan (X)	Efter (Y)	Person	Innan (X)	Efter (Y)
1	15.0	13.0	7	13.0	12.5
2	12.0	8.0	8	12.0	14.0
3	12.0	12.5	9	12.5	12.0
4	14.0	12.0	10	12.0	11.0
5	13.0	12.0	11	12.5	10.0
6	13.0	12.5			

De två stickproven består av mätningar innan och efter att ha ätit medicin och det är samma personer som har mätts. Därför är de två stickproven inte oberoende och man kan inte använda teorin i Kapitel 10.3. Observationerna är **parvisa** observationen, som är beroende.

Man kan definiera en ny stokastisk variabel $D = X - Y$. Då har man n (11 i exemplet) skillnader $D_i = X_i - Y_i$, $i = 1, ..., n$, som är ett stickprov av populationen av skillnader. Då har man att $\mu_X - \mu_Y = \mu_D$ och hypoteserna "$\mu_X = \mu_Y$" och "$\mu_D = 0$" blir samma. Dvs. att man har skrivit problemet som ett ett stickprovsproblem och kan använda metoder i Kapitel 8.

$100(1-\alpha)\%$ *konfidensintervall* för $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$ är

$$\bar{D} \pm t_{\alpha/2} S_d/\sqrt{n},$$

där S_d är stickprovsstandardavvikelsen av skillnaderna.

Om man vill testa hypotesen $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, kan man lika väl testa hypotesen $H_0 : \mu_D = 0$ (mot en lämplig alternativ hypotes). Då kan man använda teststatistikan

$$\frac{\bar{D}}{S_d/\sqrt{n}},$$

som har en T-fördelning med $n-1$ frihetsgrader om H_0 är sann.