

2. Några sannolikhetslagar

2.1 Axiomer

Axiomer:

1. $P(S) = 1$, där S är utfallsrummet
2. $P(A) \geq 0$ för varje händelse A
3. Om A_1, A_2, \dots är en samling av disjunkta händelser, är

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Ex. 2.1.1: Fördelningen av blodtyp i USA är följande: 41% A, 9% B, 4% AB och 46% O. En person körs till sjukhuset och hans blodtyp måste bestämmas. Vad är sannolikheten att blodtypen är A, B eller AB?

Sannolikheten av en unionhändelse $A \cup B$:

- 1) Om A och B är disjunkta, dvs. att $A \cap B = \emptyset$, då är

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- 2) Antag att $A \cap B \neq \emptyset$. Då är

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ex. 2.1.3: Man analyserar havsvatten. Från tidigare studier vet man att 38% av samplen (nära ett industriområde) innehåller giftiga mängder av bly eller kvicksilver, 32% giftiga mängder av bly och 16% giftiga mängder av kvicksilver. Vad är sannolikheten att ett prov (taget på måfå på samma ställe nära industriområdet) kommer att innehålla giftiga mängder av bara bly (inte kvicksilver)?

2.2 Betingad sannolikhet

Antag att A och B är händelser sådana att $P(A) \neq 0$. *Betingade sannolikheten* av B givet A definieras

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

2.3 Oberoende och multiplikationsregeln

Sannolikheten av snitthändelsen $A \cap B$ kan räknas genom att använda *multiplikationsregeln*

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Ex: Man odlar vete. Man vet att om det är mycket torrt, lönar det sig att odla vete med sannolikhet 0.1 och att det blir mycket torrt med sannolikhet 0.05. Vad är sannolikheten att det lönar sig att odla vete och att det blir mycket torrt?

Definition: Händelser A och B är *oberoende* om och endast om

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ex: Ögonfärgen bestäms av två gener, en från mamman och en från pappan. För att ha blåa ögon måste genen från mamman vara blå och genen från pappan vara blå. Annars har man bruna ögon. Anta att mamman har gener blå och brun och pappan gener blå och brun.

- a) Vad är sannolikheten att ett barn (av dessa föräldrar) har bruna ögon?
- b) Antag att ögonfärgen av olika barn (av samma föräldrar) är oberoende av varandra och att föräldrar har två barn. Vad är sannolikheten att de två barnen har bruna ögon vardera?