

Lärare: David Bolin.

Jour: Ivar Simonsson, telefon 772 5377.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling, tabeller (även BETA, Physics Handbook, skoltabeller, t ex TEFYMA), valfri miniräknare med tömda minnen.

Korrekt, väl motiverad lösning ger poängen som är indikerad i parentes vid vardera uppgift. Totalt kan man få 30 poäng och betygsgränserna för betyg 3, 4 och 5 är 12, 18 och 24 poäng.

1. Man har noterat att av hemodlade äpplen är 30% maskätna och 40% är angripna av skorv. Dessutom vet vi att 60% av de skorvangripna äpplena samtidigt är maskätna. Beräkna sannolikheten att ett hemodlat äpple varken är maskätet eller angripet av skorv. (2p)
2. I en vindkraftspark står två vindkraftverk. De fungerar oberoende av varandra och sannolikheten att de fungerar vid ett visst tillfälle är 0.98 respektive 0.90.
  - (a) Beräkna sannolikheten att precis ett av de två kraftverken fungerar. (2p)
  - (b) Kraftverket som fungerar med sannolikhet 0.98 ger effekten 50kW, medan det andra ger effekten 200kW. Beroende på vilka kraftverk som fungerar kan man få olika sammanlagda effekter: 0, 50, 200, eller 250 kW. Vad är väntevärdet av den sammanlagda effekten? (3p)
3. Man vill undersöka sannolikheten att sockerbetor skadas av maskinen som används vid skörden av betor. Ur ett stort parti nyligen skördade sockerbetor tar man ut 150 slumpmässigt valda betor och konstaterar att 12 är skadade.
  - (a) Antalet skadade betor kan ses som en observation av en stokastisk variabel  $X$ , vilken typ av fördelning har  $X$ ? Motivera svaret! (1p)
  - (b) Låt  $p$  vara sannolikheten att en beta skadas. Beräkna en lämplig skattare  $p^*$  av  $p$ . (1p)
  - (c) Beräkna skattarens väntevärde  $E(p^*)$  och varians  $V(p^*)$ . (2p)
  - (d) Beräkna ett tvåsidigt 95% konfidensintervall för  $p$ . (2p)
  - (e) Med en annan maskin för betupptagning gör man motsvarande undersökning på 200 betor och finner att 18 av dessa är skadade. Skatta skillnaden mellan sannolikheten för skadade betor för de två maskinerna och beräkna ett tvåsidigt 95% konfidensintervall för denna skillnad. Finns det någon anledning att tro att sannolikheten att skada betorna vid upptagningen skiljer sig åt mellan maskinerna? (2p)
4. Vid en undersökning av utsläppen i en flod mätte man pH-koncentrationen samtidigt uppströms och nedströms ett industriavlopp. Antag att de två uppmätta pH-koncentrationerna är normalfördelade enligt  $N(\mu_i, \sigma^2)$  respektive  $N(\mu_i + \Delta, \sigma^2)$ . Vid mätningarna erhöles följande resultat:

Observation $i$	1	2	3	4	5	6	7
Uppströms	8.37	8.41	8.33	8.01	8.78	8.66	8.31
Nedströms	8.40	8.55	8.24	8.13	8.67	8.74	8.30

- (a) Skatta  $\Delta$  i modellen. (2p)
- (b) Avgör om industriavloppet signifikant påverkar pH-koncentrationen i floden, tex med hjälp av ett lämpligt konfidensintervall eller hypotestest. (3p)

5. I ett test av bensinförbrukningen hos en ny bilmodell får tio förare köra fem mil i en på förhand bestämd hastighet. Efter körningen registreras bilens medelhastighet ( $x$  km/h) och bensinförbrukning ( $y$  l/mil):

Observation $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x$	78	65	89	77	88	70	68	91	83	75
$y$	0.75	0.73	0.83	0.80	0.81	0.75	0.65	0.85	0.83	0.78

Följande storheter kan beräknas från datan:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 784, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 7.78,$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 756.4, \quad \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 0.0324, \quad \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 4.188.$$

I intervallet för de uppmätta hastigheterna kan bensinförbrukningen antas öka linjärt med hastigheten. Vi vill därför anpassa en regressionsmodell  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ , där  $\varepsilon_i$  är oberoende och  $N(0, \sigma^2)$ -fördelade.

- (a) Skatta modellparametrarna  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  och  $\sigma$ . (2p)
- (b) Beräkna ett tvåsidigt 95% konfidensintervall för regressionslinjens lutning. (1p)
- (c) Bestäm det förväntade värdet på bensinförbrukningen då medelhastigheten är 80km/h samt ett 95% konfidensintervall för denna storhet. (2p)
6. Rayleighfördelningen är en vanlig fördelning som till exempel används inom magnetröntgen. Om den stokastiska variabeln  $X$  är Rayleighfördelad med parameter  $a$  så har den täthetsfunktion  $f(x) = \frac{x}{a} e^{-x^2/2a}$ , för  $x \geq 0$ . Dessutom gäller bland annat att  $E(X) = \sqrt{\frac{a\pi}{2}}$ ,  $V(X) = 2a(1 - \frac{\pi}{4})$  och  $V(X^2) = 4a^2$ . Baserat på  $n$  observationer  $X_i$  av  $X$  ges ML-skattaren,  $a^*$ , av parametern  $a$  av  $a^* = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ .
- (a) Beräkna  $E(X^2)$ . Ledning: det finns enklare sätt än att integrera! (1p)
- (b) Beräkna väntevärde och varians av  $a^*$ . Är  $a^*$  en väntevärdesriktig skattare av  $a$ ? (2p)
- (c) Man har gjort 100 oberoende observationer av  $X$  och fått skattningen  $a^* = 186$ . Beräkna ett tvåsidigt, approximativt 95% konfidensintervall för  $a$ . (2p)

---

**Lycka till!**

Standard normalfördelningen $P(Z \leq z)$										
$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

T-fördelningen $P(T_y \leq x)$						
$y$	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.313
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.782
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.499
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.296
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.143
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.024
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.929
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
41	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301
42	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296
43	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291
44	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286
45	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
46	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277
47	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273
48	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269
49	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
$\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090