**Matematiska vetenskaper**
**Chalmers tekniska högskola**

**Tentamen: 2015-06-05 kl** $14^{00} - 18^{00}$
**Matematisk statistik för K (TMA073 och TMA072)**

---

**Lärare och jour**: David Bolin, telefon 772 5375.

**Tillåtna hjälpmedel**: Formelsamling, tabeller (även BETA, Physics Handbook, skoltabeller, t ex TEFYMA), valfri miniräknare med tömda minnen.

Korrekt, väl motiverad lösning ger poängen som är indikerad i parentes vid vardera uppgift. Totalt kan man få 30 poäng och betygsgränserna för betyg 3, 4 och 5 är 12, 18 och 24 poäng.

---

1. (a) Låt $A$ och $B$ vara händelser med $\mathsf{P}(A) = 0.2$, $\mathsf{P}(B) = 0.3$ och $\mathsf{P}(A \cup B) = 0.4$. Bestäm den betingade sannolikheten $\mathsf{P}(A|B)$. (2p)

   (b) Tre märken av smartphones (A B och C) antas ha 0.2, 0.3 respektive 0.5 andelar av marknaden för studenter. Sannolikheten att skärmen spricker under telefonens livstid är för de olika märkena 0.1 0.02 respektive 0.04. En student har en telefon med sprucken skärm, bestäm sannolikheten för att telefonen är av märke A. (3p)

2. Man vill testa effekten av alkohol på reaktionsförmågan. I ett försök mäts reaktionsförmågan hos åtta personer före och efter alkoholintag med följande resultat:

| Person $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tid före (sekunder) | 0.50 | 0.43 | 0.62 | 0.58 | 0.66 | 0.65 | 0.46 | 0.53 |
| Tid efter (sekunder) | 0.57 | 0.46 | 0.65 | 0.62 | 0.71 | 0.69 | 0.49 | 0.59 |

   Ansätt en modell baserad på lämpliga antaganden om oberoende och normalfördelning och utför ett statistiskt test för om alkohol påverkar den genomsnittliga reaktionstiden. Modell och hypoteser ska redovisas tydligt. (4p)

3. Den tvådimensionella slumpvariabeln $(X, Y)$ har täthetsfunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5}{4} - xy & \text{om } 0 < x < 1 \text{ och } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

   (a) Beräkna marginalfördelningarna för $X$ och $Y$. (1p)

   (b) Beräkna $C(X, Y)$. (3p)

   (c) Är $X$ och $Y$ oberoende? Motivera svaret! (1p)

4. Antalet kunder som köper brieost i en ostaffär på en timme är poissonfördelat med intensitet $\lambda = 2$. Ägaren till affären misstänker att intensiteten är större än detta på torsdagar och räknar under en eftermiddag till 7 kunder under två timmar som köper brieost. Använd direktmetoden för att testa om intensiteten är större under torsdagar. (3p)

5. Ett jordbruk släpper ut nitrat i ett närliggande vattendrag. Vid en undersökning av floden mäts nitrathalten vid ett antal platser nedströms från jordbruket med resultaten

| Avstånd (meter) | 0 | 100 | 200 | 300 | 380 | 490 | 600 | 760 | 900 | 1050 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nitrathalt (mg/l) | 50 | 47 | 39 | 41 | 44 | 42 | 32 | 33 | 24 | 28 |

   (a) Skriv upp en modell under antagandet att nitrathalten avtar linjärt med avståndet från jordbruket samt att avvikelserna från linjen kan antas vara normalfördelade med konstant varians. Skatta parametrarna i modellen och variansen hos avvikelserna. (3p)

(b) Gör ett konfidensintervall för hur mycket nitrathalten minskar per 100m. (1p)

(c) 700 meter nedströms ligger en badplats där nitrathalten mäts regelbundet. Utifrån modellen, vad kan vi säga om nästa mätning som kommer göras vi badplatsen? Ange ett intervall för den. (2p)

6. Den geometriska fördelningen har sannolikhetsfunktion $p(k) = \theta(1-\theta)^{k-1}$, $k = 0, 1, \ldots$.

   (a) Härled maximum-likelihood skattaren $\hat{\theta}$ av parametern $\theta$ baserat på ett stickprov $X_1, \ldots, X_n$ av oberoende geometriskt fördelade variabler. (3p)

   (b) Beräkna $\mathsf{E}(1/\hat{\theta})$ och $\mathsf{V}(1/\hat{\theta})$. Är $1/\hat{\theta}$ en väntevärdesriktig skattare av $1/\theta$? (2p)

   (c) Vilken fördelning har $1/\hat{\theta}$ approximativt om $n$ är stort? Använde detta för att konstruera ett approximativt konfidensintervall för $1/\theta$. (2p)

---

**Lycka till!**