
Lärare och Jour: David Bolin, telefon 772 53 75.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och valfri miniräknare med tömda minnen.

Korrekt, väl motiverad lösning ger poängen som är indikerad i parentes vid vardera uppgift. Totalt kan man få 40 poäng och betygsgränserna för betyg 3, 4 och 5 är 16, 24 och 32 poäng.

- (a) X och Y är två oberoende normalfördelade variabler med väntevärden 1 respektive 2 och varianser 4 respektive 3, $X \sim N(1, 4)$ och $Y \sim N(2, 3)$. Bestäm $P(2X + 5Y > 4)$. (3p)
 - (b) Två händelser A och B uppfyller $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ och $P(A \cap B) = 0.1$. Bestäm sannolikheten $P(A^c \cap B^c)$. (2p)
2. Två slumpvariabler X och Y är kontinuerliga med

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
$$f_{Y|x}(y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

- Beräkna $f_Y(y)$. (3p)
 - Beräkna $E(X)$ och $E(Y)$. *Ledtråd: Kom ihåg formeln $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2$* (2p)
3. En fabrik som tillverkar Halloweenkostymer har som mål att felandelen i produktionen ska vara max 5%. Som rutinmässig kvalitetskontroll tas varje dag slumpmässigt 15 kostymer ut och undersöks. Om fler än 1 kostym är felaktig avskiljs hela dagens produktion för ytterligare kontroll.
- För en given dag, vad är sannolikheten att den ytterligare kontrollen måste göras om felandelen i produktionen verkligen är 5%? (2p)
 - En dag utförs en större kontroll där 100 kostymer undersöks och totalt 7 felaktiga hittas. Testa om detta påvisar att felandelen i produktionen är större än 5%. (3p)
4. I projektet i kursen användes linjär regression för att undersöka om kolesterol påverkade frisättningen av dopamin. Ett alternativt sätt att undersöka detta är att se experimentet som ett variansanalyförsök med ensidig indelning. Vi har $n = 50$ mätningar (av logaritmerad laddning) per kolesterolhalt. Medelvärdet av dessa rapporteras i följande tabell:

Kolesterolhalt	Medelvärde
0%	3.4756
10%	2.8228
20%	2.4778
30%	3.0077

Dessutom är den totala kvadratsumman för mätningarna $Q = \sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y})^2 = 209.0779$.

- Skriv upp lämplig modell. (1p)
- Beräkna variansanalystabellen för försöket. (2p)
- Utför ett F-test för att undersöka om kolesterolet påverkar frisättningen. (2p)

5. I ett experiment studeras hur andelen gas som absorberas beror av gastemperaturen och ångtrycket för den absorberande vätskan. Modellen som antas är

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathbf{N}(0, \sigma^2)$$

där y_i är andelen absorberad gas, x_{1i} är gastemperaturen (mätt i °C), och x_{2i} är ångtrycket (mätt i mm Hg). Baserat på $n = 15$ observationer beräknas följande matriser:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = 10.26, \quad \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 10.4915 \\ 288.3107 \\ 186.8469 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 1.8234 & -0.0487 & -0.0271 \\ -0.0487 & 0.0015 & 0.0004 \\ -0.0271 & 0.0004 & 0.0012 \end{pmatrix}$$

- (a) Skatta parametrarna β_0 , β_1 och β_2 . (2p)
- (b) Skatta variansen σ^2 och bestäm antalet frihetsgrader. (2p)
- (c) Beräkna 95% konfidensintervall för β_1 och β_2 . (2p)
- (d) Beräkna ett 95% konfidensintervall för den förväntade absorptionen vid 37 °C gastemperatur och 10 mm Hg ångtryck. (2p)
- (e) Baserat på analysen ovan, kan modellen förenklas? Motivera svaret! Om svaret är ja, hur ser den förenklade modellen ut? (2p)
6. I en studie undersöktes effekterna av kaffe på blodtryck genom att deltagarnas blodtryck mättes i början av studien och sedan tre veckor senare efter att de avstått från kaffe under studiens gång. I studien deltog 11 kvinnor, varav fem rökare och sex icke-rökare. I följande tabell visas det systoliska (övre) blodtrycket hos de 11 personerna:

Person nr	Icke-rökare						Rökare				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Före	134	131	135	135	132	130	138	134	134	133	132
Efter	134	129	137	133	131	127	133	132	132	127	127

- (a) Skatta väntevärde och varians hos båda grupperna före och efter studien började. (2p)
- (b) Undersök om variansen hos de två grupperna skilde sig innan studien började. (3p)
- (c) Undersök om den förväntade nivån hos grupperna skilde sig innan studien började. (3p)
- (d) Undersök om rökarna minskade sin nivå under studiens gång. (2p)

I varje deluppgift, kom ihåg att skriva upp vilket test som utförs och signifikansnivån för testet. Kom också ihåg att rapportera modellantaganden. Lämpliga antaganden om normalfördelning och oberoende kan göras.

Lycka till!