Föreläsning 4: Kontinuerliga fördelningar

Matematisk statistik

David Bolin
Chalmers University of Technology
September 6, 2017

Binomialfördelningen

Binomialfördelningen, förkortad Bin(n, p), är en fördelning som beskriver antalet lyckade försök av totalt n stycken Bernoulli-försök.

Binomialfördelningen

En stokastisk variabel X sägs vara binomialfördelad, Bin(n, p), om den har sannolikhetsfunktion

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

där

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2}$$

och $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$.

Binomialfördelningen

Bin(n, p)-fördelningen kan ses som summan av n Be(p) variabler.

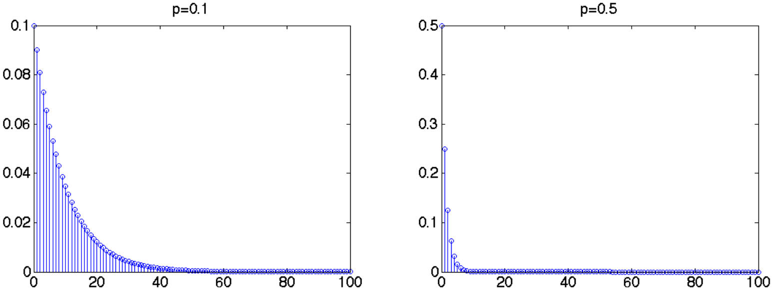
Därför är Bin$(1, p)$-fördelningen är den samma som Be(p)-fördelningen

Lite mer generellt kan vi skriva upp följande sats:

Sats

Om X_1 är Bin(n_1, p) och X_2 är Bin(n_2, p) samt att X_1 och X_2 är oberoende gäller att $X_1 + X_2$ är Bin$(n_1 + n_2, p)$-fördelad.

Den geometriska fördelningen



Den geometriska fördelningen beskriver antalet försök fram till det första lyckade i en serie av Bernoulli-försök.

Geometriska fördelningen

Slumpvariabeln X är geometriskt fördelad med parameter p om den har sannolikhetsfunktion $f_X(k) = (1-p)^{k-1}p$.

Negativa Binomialfördelningen

Den negativa binomialfördelningen beskriver antalet försök fram till att r försök lyckats i en serie av Bernoulli-försök.

Negativa Binomialfördelningen

Slumpvariabeln X har en negativ binomialfördelning med parametrar r och p om den har sannolikhetsfunktion

$$f(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1 \dots$$

Vi betecknar den med nBin(r,p).

Motivering:

- Sannolikheten för ett specifikt utfall med k försök varav r lyckade: $(1-p)^{k-r}p^r$
- Sista försöket lyckas. Binomialkoefficienten ger antalet sätt vi kan välja $r-1$ av de återstående $k-1$ försöken på.

Hypergeometriska fördelningen

- Antag att vi har N objekt varav r har "rätt" egenskap.
- Drag n objekt utan återläggning och låt X vara antal objekt med rätt egenskap.

Hypergeometrisk fördelning

Slumpvariabeln X har en hypergeometrisk fördelning med parametrar N, n och r om den har sannolikhetsfunktion

$$f(k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \max(0, n+r-N) \leq k \leq \min(n, r)$$

Vi betecknar den med Hyp(N, n, r).

- Om $n = 1$ har vi Hyp$(N, 1, r) =$ Be(r/N).
- Om N och r är stora i förhållande till n har vi Hyp$(N, n, r) \approx$ Bin$(n, r/N)$.

Poissonfördelningen

Poissonfördelningen används ofta för att beskriva fördelningen av antalet händelser av något slag som inträffar under ett tidsintervall, på en yta, eller i en volym.

Några exempel där denna fördelning passar bra är

- Räkna antalet radioaktiva partiklar som emitteras under en minut från ett radioaktivt material.
- Registrera antalet inkommande telefonsamtal till en telefonväxel under en timme.

Poissonfördelningen

En slumpvariabel X sägs vara Poissonfördelad med parameter μ om den har sannolikhetsfunktion

$$f(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Vi använder ofta beteckningen Po(μ) för denna fördelning.

Poissonfördelningen

Summering av Poissonvariabler

Vi har vi att om X_1 är Po(μ_1) och X_2 är Po(μ_2) så gäller att $X_1 + X_2$ är Po($\mu_1 + \mu_2$).

Konceptuellt kan fördelningen ses som en gränsfördelning till binomialfördelningen om vi låter n gå mot oändligheten och p gå mot noll. Mer specifikt har vi

Sats

Då $n \to \infty$, $p \to 0$, och $np \to \mu$ så gäller för ett fixt heltal $k \geq 0$ att

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \tag{3}$$