Föreläsning 7: Punktskattningar

Matematisk statistik

David Bolin
Chalmers University of Technology
September 18, 2017

Tvådimensionella fördelningar

Definition

En tvådimensionell slumpvariabel (X, Y) tillordnar två numeriska värden till varje utfall i Ω.

För diskreta variabler har vi sannolikhetsfunktionen

$$f_{X,Y}(i, j) = \mathsf{P}(X = i, Y = j).$$

Där $f_{X,Y}(i, j) \geq 0$ och $\sum_{i,j} f_{X,Y}(i, j) = 1$. För kontinuerliga variabler har vi en täthetsfunktion $f_{X,Y}(x, y)$ som är sådan att

1. $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$, och
3. $\mathsf{P}(a \leq X \leq b \text{ och } c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x, y) dx dy$.

Marginalfördelningar

Givet en diskret tvådimensionell slumpvariabel (X, Y) definieras marginalfördelningarna för X och Y som

$$f_X(i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(i,j)$$

$$f_Y(j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(i,j)$$

I det kontinuerliga fallet definieras marginalfördelningarna för X och Y på motsvarande sätt som

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Väntevärde

Givet en tvådimensionell slumpvariabel (X, Y) definieras väntevärdena för X och Y som

$$\mathsf{E}(X) = \begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} i f_{X,Y}(i,j), & \text{om } X \text{ diskret,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y) dx dy, & \text{om } X \text{ kontinuerlig,} \end{cases}$$

och

$$\mathsf{E}(Y) = \begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} j f_{X,Y}(i,j), & \text{om } Y \text{ diskret,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x,y) dx dy, & \text{om } Y \text{ kontinuerlig.} \end{cases}$$

Notera att vi också kan formulera väntevärdena med marginalfördelningarna för X och Y. Till exempel

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{i,j} i f_{X,Y}(i,j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(i,j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i f_X(i)$$

Betingade fördelningar

Den betingade fördelningen för X givet $Y = y$ definieras som

$$f_{X|y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

givet att $f_Y(y) > 0$. På motsvarande sätt har vi den betingade fördelningen för Y givet $X = x$:

$$f_{Y|x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)},$$

Oberoende slumpvariabler

Två slumpvariabler X och Y sägs vara oberoende om deras täthetsfunktion (eller sannolikhetsfunktion) kan skrivas som produkten av marginalfördelningarna. Det vill säga

$$f_{X,Y}(i, j) = f_X(i) f_Y(j)$$

Kovarians

Kovarians

Kovariansen mellan X och Y definieras som
$\mathsf{C}(X,Y) = \mathsf{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$ där $\mu_X = \mathsf{E}(X)$ och $\mu_Y = \mathsf{E}(Y)$.

- Enligt definitionen kan vi skriva kovariansen som

$$\mathsf{C}(X,Y) = \begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(i-\mu_X)(j-\mu_Y)f_{X,Y}(i,i), & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f_{X,Y}(x,y), & \text{kont.} \end{cases}$$

- Notera att vi har att $\mathsf{C}(X,X) = \mathsf{V}(X)$.
- $\mathsf{C}(X,Y)$ kan beräknas som $\mathsf{C}(X,Y) = \mathsf{E}(XY) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)$.
- Om X och Y oberoende: $\mathsf{C}(X,Y) = 0$, $\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)$.
- För två slumpvariabler X och Y, och två tal a och b har vi

$$\mathsf{V}(aX+bY) = a^2\mathsf{V}(X) + b^2\mathsf{V}(Y) + 2ab\mathsf{C}(X,Y)$$

Korrelation och oberoende

Korrelation

Den så kallade korrelationskoefficienten definieras som

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathsf{C}(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{V}(X)\mathsf{V}(Y)}}.$$

- Detta mått beskriver linjär samvariation mellan X och Y.
- Vi har att $-1 \leq \rho \leq 1$.
- Vi säger att X och Y är okorrelerade om $\rho(X,Y) = 0$.

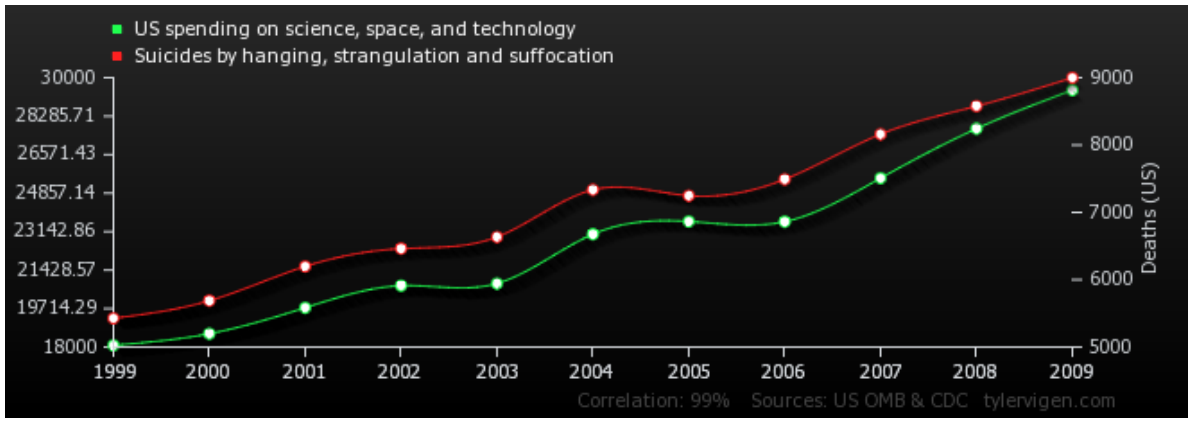
Vi har följande samband mellan beroende och korrelation:

- Om X och Y är oberoende så är de okorrelerade.
- Om X och Y är okorrelerade så behöver de inte vara oberoende.

Dessa samband är naturliga eftersom två slumpvariabler är oberoende om det inte finns någon samvariation alls mellan dem, medan de är okorrelerade om det saknas *linjär* samvariation.

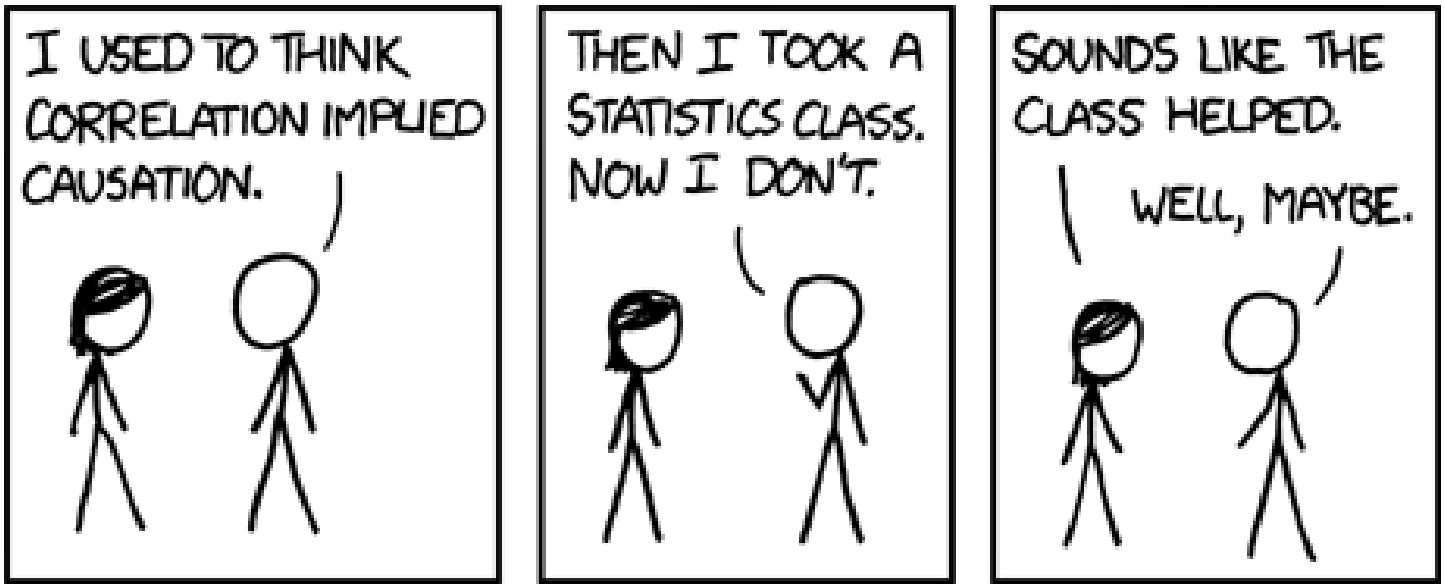
Korrelation och kausatilitet

- Korrelation säger inget om orsakssamband (kausalitet)!
- Vi kan också ha att all samvariation kan förklaras av en tredje icke uppmätt variabel.
- Två exempel:
  - Dagar med hög glassförsäljning tenderar att ha fler drunkningsolyckor. Dags att förbjuda glass?
  - US spending on science, space, and tech. correlates ($\rho = 0.99$) with Suicides by hanging, strangulation and suffocation[1]



[1] Källa: `http://www.tylervigen.com/view_correlation?id=1597`

- Kausala frågor handlar om mekanismer som genererar datan eller prediktioner om vad som kommer ske efter någon åtgärd.
- Tex: Förändras antalet drunkingsolyckor om vi förbjuder glass?
- Det finns mänger av kausala påståenden i nyheterna!
  - "Ät frukost om du vill minska din risk för kranskärlssjukdomar"
- Vi måste vara försiktiga med kausala påståenden:
  - Om personer som äter frukost tenderar ha färre kranskärlssjukdomar, borde vi därför äta frukost?
- Vi måste veta hur datan samlas in för att svara på kausala frågor! Vi återkommer till detta senare.



Statistikteori

Antag att vi har fått observationer $x_1, \ldots, x_n$ från en viss fördelning. Givet dessa observationer, vad kan vi säga om parametrarna i fördelningen?

Vi kommer titta på tre olika frågeställningar:

punktskattning Vad är ett troligt värde för parametrarna?

konfidensintervall Hur säker är denna skattning? För att karakterisera osäkerheten vill vi bilda ett intervall som med hög sannolikhet ska täcka det sanna värdet på parametern.

hypotesprövning Undersök hypoteser kring parametrana, till exempel kan vi vilja veta om $\mu > 0$ i en normalfördelning.

Senare kommer vi också titta på jämförelser mellan olika stickprov.

Stickprov

Vi kallar observationerna vi baserar vår analys på för ett stickprov.

Definition: Stickprov

Ett stickprov av storlek n är n oberoende observationer av en slumpvariabel X. Vi kan alltså skriva stickprovet som observationer av n slumpvariabler $X_1, \ldots, X_n$ där alla X_i är oberoende och likafördelade (alltså har samma fördelning).

Notation

Vi använder små bokstäver för mätningarna $(x_1, \ldots, x_n)$, dessa är alltså numeriska värden. Vi använder stora bokstäver för motsvarande slumpvariabler $(X_1, \ldots, X_n)$.

Populationer

- Ofta tolkar vi stickprovet som en dragning ur en stor population som vi vill få kunskap om. Begreppet population kan innebära lite olika saker, vi kan skilja på två typfall:
  - En väl avgränsad mängd saker, där vi i teorin räkna upp alla ingående element i en lista.
  - Något lite mer abstrakt utan någon konkrekt avgränsning. Till exempel kan vi ha en process av vilken vi gör upprepade mätningar. Populationen kan då ses som alla möjliga slumpmässiga försök av denna typ.
- Vår definition av stickprov täcker det andra fallet och kan oftast ses som en bra approximation i det första fallet om n är litet i förhållande till storleken på populationen.
- Det är viktigt att vårt stickprov är *representativt* för populationen, vilket betyder att det är någorlunda typiskt för populationen. Om detta inte är fallet kan vi få systematiska fel i våra skattningar.