
FORMELSAMLING HT18
MATEMATISK STATISTIK FÖR K, TMA074

Sannolikhetssteorins grunder

- Följande gäller för sannolikheter
 - * $0 \leq P(A) \leq 1$
 - * $P(\Omega) = 1$
 - * $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ om händelserna A och B är oförenliga (disjunkta)
- Additionssatsen för två händelser: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Betingad sannolikhet: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- Bayes sats: $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
- Satsen om total sannolikhet: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$, där händelserna B_1, \dots, B_n är parvis oförenliga händelser och $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$
- A och B är oberoende $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Endimensionella stokastiska variabler

- Fördelningsfunktionen för X : $F_X(x) = P(X \leq x)$
- Sannolikhetsfunktionen för en diskret s.v. X : $f_X(k) = P(X = k)$
- Täthetsfunktionen för en kontinuerlig s.v. X : $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$
- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \begin{cases} \sum_{k=a+1}^b f_X(k) & \text{(diskret s.v. och } a \text{ och } b \text{ heltal)} \\ \int_a^b f_X(x) dx & \text{(kontinuerlig s.v.)} \end{cases}$

Flerdimensionella stokastiska variabler

- Simultan fördelningsfunktion:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} \sum_{i \leq x, j \leq y} f_{X,Y}(i, j), & \text{(diskret s.v.)} \\ \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(t, u) dt du, & \text{(kontinuerlig s.v.)} \end{cases}$$

- Marginell täthetsfunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) & \text{(diskret s.v.)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy & \text{(kontinuerlig s.v.)} \end{cases}$$

- Betingad fördelning: $f_{X|Y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$
- $P(a \leq X \leq b \text{ och } c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x, y) dx dy$.
- X och Y är oberoende om $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ för alla x och y .

Väntevärden

- Väntevärdet av $g(X, Y)$:

$$E(g(X, Y)) = \begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} g(i, j) f_{X, Y}(i, j), & \text{(diskret s.v.)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X, Y}(x, y) dx dy, & \text{(kontinuerlig s.v.)} \end{cases}$$

- Varians: $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$
- Standardavvikelse: $\sqrt{V(X)}$
- Kovarians: $C(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- Väntevärde av linjärkombination: $E(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b$
- Varians av linjärkombination: $V(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_i a_j C(X_i, X_j)$
- Om X_1, \dots, X_n är oberoende så är de okorrelerade, dvs $C(X_i, X_j) = 0, i \neq j$
- Korrelationskoefficient: $\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

Egenskaper hos vanliga fördelningar

- $X \sim \text{Bin}(n_1, p), Y \sim \text{Bin}(n_2, p)$ samt oberoende $\Rightarrow X + Y \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$
- $X \sim \text{Po}(\mu_1), Y \sim \text{Po}(\mu_2)$ samt oberoende $\Rightarrow X + Y \sim \text{Po}(\mu_1 + \mu_2)$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ där $\Phi(\cdot)$ ges av tabell.
- $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \dots, n$ oberoende $\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2)$
- $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(\nu)$ samt oberoende $\Rightarrow \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}} \sim t(\nu)$
- X_1, \dots, X_n oberoende och $N(0, 1) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$
- X_1, \dots, X_n oberoende och $N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n - 1)$
- $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$ samt oberoende $\Rightarrow \frac{X/n}{Y/m} \sim F(n, m)$
- $F_{1-\alpha}(n, m) = 1/F_\alpha(m, n)$

Centrala gränsvärdesatsen

Om X_1, \dots, X_n är oberoende och likafördelade med $E(X_i) = \mu_i$ och $V(X_i) = \sigma^2$ så gäller att $\sum_{i=1}^n X_i$ är approximativt $N(n\mu, n\sigma^2)$ -fördelad om n är stort nog. Från bland annat detta följer följande approximationer

- $\text{Po}(\mu) \approx N(\mu, \mu)$ om $\mu \geq 15$
- $\text{Bin}(n, p) \approx N(np, np(1 - p))$ om $np(1 - p) \geq 10$
- $\text{Bin}(n, p) \approx \text{Po}(np)$ om $p \leq 0.1$ och $n \geq 10$

Statistik och punktskattningar

Beskrivning av data:

- Stickprovsmedelvärde: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- Stickprovsvarians: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} [\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2]$
- Stickprovskovarians: $c_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
- Korrelationskoefficient: $r_{xy} = \frac{c_{xy}}{s_x s_y}$

Låt x_1, \dots, x_n vara observationer av oberoende och likafördelade s.v. X_1, \dots, X_n med väntevärde μ och varians σ^2 , då är stickprovsmedelvärdet en väntevärdesriktig skattning av μ och stickprovsvariansen en väntevärdesriktig skattning av σ^2 .

Fördelning	$f(x)$		väntevärde	varians
Binomial Bin(n, p)	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$k = 0, \dots, n$	np	$np(1-p)$
Negativ binomial nBin(r, p)	$\binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$	$k = r, r+1, \dots$	r/p	$r(1-p)/p^2$
Hypergeometrisk Hyp(N, n, r)	$\frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$k = \max(0, n+r-N), \dots, \min(n, r)$	nr/N	$\frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)}$
Poisson Po(μ)	$p(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$	$k = 0, 1, \dots$	μ	μ
Geometrisk Ge(p)	$p(1-p)^{k-1}$	$k = 1, 2, \dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Likformig U(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential Exp(λ)	$\frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}$	$x \geq 0$	λ	λ^2
Gamma $\Gamma(a, b)$	$\frac{1}{b^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/b}$	$x \geq 0$	ab	ab^2
Normal N(μ, σ^2)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$	$-\infty \leq x \leq \infty$	μ	σ^2
χ^2 -fördelning $\chi^2(n)$	$\frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-x/2} x^{n/2-1}$	$x \geq 0$	n	$2n$
t-fördelning t(ν)	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	$-\infty \leq x \leq \infty$	0	$\frac{\nu}{\nu-2}$ om $\nu > 2$ ∞ om $1 < \nu \leq 2$
F-fördelning F(n, m)	$\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2}) n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} x^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{m}{2}) (m+nx)^{\frac{n+m}{2}}}$	$x \geq 0$	$\frac{m}{m-2}$ om $m > 2$	$\frac{2m^2(m+n-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$ om $m > 4$

Table 1: Vanliga fördelningar, där $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ och $\Gamma(\nu)$ är gammafunktionen som uppfyller $\Gamma(k) = (k-1)!$ för positiva heltal k .

Intervallskattningar

Samtliga intervall nedan är tväsidiga med $100(1-\alpha)\%$ konfidensgrad

- μ då $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ och σ är känd: $I_\mu = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- μ då $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ och σ är okänd: $I_\mu = \left(\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
- σ^2 då $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ och μ är okänd: $I_{\sigma^2} = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right)$
- $\mu_1 - \mu_2$ då $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), i = 1, \dots, n_1$ och $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), i = 1, \dots, n_2$
* då σ_1 och σ_2 är kända: $I_{\mu_1 - \mu_2} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2}{n_2}}\right)$

* då $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ där σ är okänd: $I_{\mu_1 - \mu_2} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$,
 här är $s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ den poolade variansskattningen.

* då $\sigma_1 \neq \sigma_2$ är okända (approximativt): $I_{\mu_1 - \mu_2} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(f) \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \right)$, där $f = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$

• σ_1^2/σ_2^2 då $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), i = 1, \dots, n_1$ och $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), i = 1, \dots, n_2$
 μ_1 och μ_2 okända $I_{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} \right)$

• Δ då $Z_i = X_i - Y_i \sim N(\Delta, \sigma^2), i = 1, \dots, n$ där σ okänd (stickprov i par): $I_{\Delta} = \left(\bar{z} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s_z}{\sqrt{n}} \right)$

• p då $X \sim \text{Bin}(n, p)$ (approximativt då $np(1-p) \geq 10$): $I_p = \left(p^* \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \right)$, där $p^* = \frac{x}{n}$

• $p_1 - p_2$ då $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, p_1)$ och $X_2 \sim \text{Bin}(n_2, p_2)$ (approximativt då $n_i p_i(1-p_i) \geq 10$):
 $I_{p_1 - p_2} = \left(p_1^* - p_2^* \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}} \right)$, där $p_i^* = \frac{x_i}{n_i}$

• μ då $X \sim \text{Po}(\mu)$ (approximativt då $\mu \geq 15$): $I_{\mu} = (x \pm z_{\alpha/2} \sqrt{x})$

Enkel linjär regression

Modellen är $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$ där $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ är oberoende.

- Minsta-kvadratskattningar

$$\beta_1^* = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right), \quad \beta_0^* = \bar{y} - \beta_1^* \bar{x} \sim N\left(\beta_0, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)\right)$$

$$s^2 = \frac{Q_0}{n-2} \text{ där } Q_0 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0^* - \beta_1^* x_i)^2 = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, S_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- Tvåsidigt konfidensintervall för $\mu_Y(x_0) = \beta_0 + \beta_1 x_0$: $I_{\mu_Y(x_0)} = \left(\beta_0^* + \beta_1^* x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2) s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \right)$
- Tvåsidigt prediktionsintervall för $Y(x_0)$: $I_{Y(x_0)} = \left(\beta_0^* + \beta_1^* x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2) s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \right)$

Multipel linjär regression

Modellen är $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$ där $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ är oberoende.

- Modellen kan också skrivas på matrisform som $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$.
- Minsta-kvadratskattningar

$$\beta^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \sim N(\beta, \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1})$$

$$s^2 = \frac{Q_0}{n - (p+1)} \text{ där } Q_0 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0^* - \beta_1^* x_{1i} - \dots - \beta_p^* x_{pi})^2 = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \beta^{*T} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

- Tvåsidigt konfidensintervall för β_i : $I_{\beta_i} = \left(\beta_i^* \pm t_{\alpha/2}(n-p-1) s \sqrt{((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1})_{i+1, i+1}} \right)$
- Tvåsidigt konfidensintervall för $\mu_Y(\mathbf{x}_0) = \beta_0 + \beta_1 x_{10} + \dots + \beta_p x_{p0}$:
 $I_{\mu_Y(\mathbf{x}_0)} = \left(\mu_Y^*(\mathbf{x}_0) \pm t_{\alpha/2}(n-p-1) s \sqrt{\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0} \right)$

Faktor försök

I ett 2^k -faktor försök undersöks k faktorer: A, B, C, ... Varje faktor kan anta två nivåer. Vid n replikat mäts varje faktorkombination n gånger. Till exempel för ett 2^3 -försök är modellen

$$Y_{ijkl} = \mu + Ax_i + Bx_j + Cx_k + ABx_ix_j + ACx_ix_k + BCx_jx_k + ABCx_ix_jx_k + \varepsilon_{ijkl}$$

där $x_i = -1$ om faktor A har låg nivå och $x_i = 1$ om faktor A har hög nivå, och x_j och x_k är definierade på motsvarande sätt för faktor B och C. De olika effekterna kan skattas med hjälp av följande teckentabell

Försök	Medel	μ	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
(1)	\bar{y}_{111}	+	-	-	-	+	+	+	-
a	\bar{y}_{211}	+	+	-	-	-	-	+	+
b	\bar{y}_{121}	+	-	+	-	-	+	-	+
ab	\bar{y}_{221}	+	+	+	-	+	-	-	-
c	\bar{y}_{112}	+	-	-	+	+	-	-	+
ac	\bar{y}_{212}	+	+	-	+	-	+	-	-
bc	\bar{y}_{122}	+	-	+	+	-	-	+	-
abc	\bar{y}_{222}	+	+	+	+	+	+	+	+

För en given effekt θ ges standardfelet för effektskattning av $d(\hat{\theta}) = s/\sqrt{2^k n}$, där s^2 är den poolade variansskattningen från de olika försöken. Variansskattningen har $2^k(n-1)$ frihetsgrader. Om θ kan antas vara noll är $2^k n \hat{\theta}^2$ en skattning av variansen, vilket är användbart om försöket saknar replikat.

Variansanalys

Ett försök med ensidig indelning har modell

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \text{ där } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), i = 1, \dots, a, j = 1, \dots, n_i$$

och följande variansanalystabell kan användas för att testa om alla $\alpha_i = 0$:

Variation	Kvadratsumma	Frihetsgrader	Medelkvadratsumma	Teststorhet
Faktor A	$SS_A = \sum_{ij} (\bar{y}_i - \bar{y})^2$	$f_A = a - 1$	$MS_A = SS_A / f_A$	MS_A / MS_E
Residual	$SS_E = \sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$	$f_E = \sum_i n_i - a$	$MS_E = SS_E / f_E$	
Total	$SS_{Tot} = SS_E + SS_A$	$f = \sum_i n_i - 1$		

Ett försök med tvåsidig indelning har modell

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \text{ där } \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2), i = 1, \dots, a, j = 1, \dots, b, k = 1, \dots, n$$

och följande variansanalystabell kan användas för att testa om alla $\alpha_i = 0$, om alla $\beta_j = 0$, eller om alla $(\alpha\beta)_{ij} = 0$:

Variation	Kvadratsumma (SS)	Frihetsgrader	Medelkvadrat	Teststorhet
Faktor A	$SS_A = \sum_{ijk} (\bar{y}_{i.} - \bar{y})^2$	$f_A = a - 1$	$MS_A = SS_A / f_A$	MS_A / MS_E
Faktor B	$SS_B = \sum_{ijk} (\bar{y}_{.j} - \bar{y})^2$	$f_B = b - 1$	$MS_B = SS_B / f_B$	MS_B / MS_E
Faktor AB	$SS_{AB} = SS_{Tot} - SS_E - SS_A - SS_B$	$f_{AB} = f_A f_B$	$MS_{AB} = SS_{AB} / f_{AB}$	MS_{AB} / MS_E
Residual	$SS_E = \sum_{ijk} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2$	$f_E = ab(n-1)$	$MS_E = SS_E / f_E$	
Total	$SS_{Tot} = \sum_{ijk} (y_{ijk} - \bar{y})^2$	$abn - 1$		

Teststorheten för effekt θ en observation av $F(f_\theta, f_E)$.

Tabell 1: Normalfördelningen

Tabellen visar $\Phi(x) = P(X \leq x)$ där $X \sim N(0, 1)$.
 För negativa värden, utnyttja att $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0 :	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1 :	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2 :	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3 :	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4 :	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5 :	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6 :	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7 :	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8 :	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9 :	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0 :	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1 :	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2 :	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3 :	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4 :	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5 :	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6 :	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7 :	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8 :	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9 :	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0 :	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1 :	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2 :	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3 :	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4 :	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5 :	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952

Tabell 2: Normalfördelningens kvantiler

Tabellen visar $P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \sim N(0, 1)$

α	.1	.05	.025	.01	.005	.001	.0005	.0001	.00005	.00001
λ_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905	3.7190	3.8906	4.2649

Tabell 3: t -fördelningens kvantiler

Tabellen visar $P(X > t_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \sim t(f)$

α	.1	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
$t_\alpha(1)$	3.0777	6.3138	12.706	31.820	63.657	318.31	636.62
$t_\alpha(2)$	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.327	31.599
$t_\alpha(3)$	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.215	12.924
$t_\alpha(4)$	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
$t_\alpha(5)$	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
$t_\alpha(6)$	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
$t_\alpha(7)$	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079
$t_\alpha(8)$	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
$t_\alpha(9)$	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
$t_\alpha(10)$	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
$t_\alpha(11)$	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247	4.4370
$t_\alpha(12)$	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296	4.3178
$t_\alpha(13)$	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520	4.2208
$t_\alpha(14)$	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405
$t_\alpha(15)$	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728
$t_\alpha(16)$	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862	4.0150
$t_\alpha(17)$	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
$t_\alpha(18)$	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105	3.9216
$t_\alpha(19)$	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5794	3.8834
$t_\alpha(20)$	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518	3.8495
$t_\alpha(21)$	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272	3.8193
$t_\alpha(22)$	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050	3.7921
$t_\alpha(23)$	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676
$t_\alpha(24)$	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454
$t_\alpha(25)$	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
$t_\alpha(26)$	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7066
$t_\alpha(27)$	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210	3.6896
$t_\alpha(28)$	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
$t_\alpha(29)$	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962	3.6594
$t_\alpha(30)$	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460
$t_\alpha(40)$	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.3069	3.5510
$t_\alpha(60)$	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.2317	3.4602
$t_\alpha(120)$	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174	3.1595	3.3735
$t_\alpha(\infty)$	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905

Tabell 4: χ^2 -fördelningens kvantiler

Tabellen visar $P(X > \chi^2_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \sim \chi^2(f)$

α	.9995	.999	.995	.99	.975	.95	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
$\chi^2_\alpha(1)$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	12.1
$\chi^2_\alpha(2)$	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	15.2
$\chi^2_\alpha(3)$	0.02	0.02	0.07	0.12	0.22	0.35	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	17.7
$\chi^2_\alpha(4)$	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	20.0
$\chi^2_\alpha(5)$	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	22.1
$\chi^2_\alpha(6)$	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	24.1
$\chi^2_\alpha(7)$	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	26.0
$\chi^2_\alpha(8)$	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	27.9
$\chi^2_\alpha(9)$	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	29.7
$\chi^2_\alpha(10)$	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	31.4
$\chi^2_\alpha(11)$	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	33.1
$\chi^2_\alpha(12)$	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	34.8
$\chi^2_\alpha(13)$	2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	36.5
$\chi^2_\alpha(14)$	2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	38.1
$\chi^2_\alpha(15)$	3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	39.7
$\chi^2_\alpha(16)$	3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	41.3
$\chi^2_\alpha(17)$	3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	42.9
$\chi^2_\alpha(18)$	4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	44.4
$\chi^2_\alpha(19)$	4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.1	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	46.0
$\chi^2_\alpha(20)$	5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.9	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	47.5
$\chi^2_\alpha(21)$	5.90	6.45	8.03	8.90	10.3	11.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	49.0
$\chi^2_\alpha(22)$	6.40	6.98	8.64	9.54	11.0	12.3	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	50.5
$\chi^2_\alpha(23)$	6.92	7.53	9.26	10.2	11.7	13.1	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	52.0
$\chi^2_\alpha(24)$	7.45	8.08	9.89	10.9	12.4	13.8	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	53.5
$\chi^2_\alpha(25)$	7.99	8.65	10.5	11.5	13.1	14.6	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	54.9
$\chi^2_\alpha(26)$	8.54	9.22	11.2	12.2	13.8	15.4	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	56.4
$\chi^2_\alpha(27)$	9.09	9.80	11.8	12.9	14.6	16.2	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	57.9
$\chi^2_\alpha(28)$	9.66	10.4	12.5	13.6	15.3	16.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9	59.3
$\chi^2_\alpha(29)$	10.2	11.0	13.1	14.3	16.0	17.7	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3	60.7
$\chi^2_\alpha(30)$	10.8	11.6	13.8	15.0	16.8	18.5	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7	62.2
$\chi^2_\alpha(40)$	16.9	17.9	20.7	22.2	24.4	26.5	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4	76.1
$\chi^2_\alpha(50)$	23.5	24.7	28.0	29.7	32.4	34.8	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7	89.6
$\chi^2_\alpha(60)$	30.3	31.7	35.5	37.5	40.5	43.2	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6	103
$\chi^2_\alpha(70)$	37.5	39.0	43.3	45.4	48.8	51.7	90.5	95.0	100	104	112	116
$\chi^2_\alpha(80)$	44.8	46.5	51.2	53.5	57.2	60.4	102	107	112	116	125	128
$\chi^2_\alpha(90)$	52.3	54.2	59.2	61.8	65.6	69.1	113	118	124	128	137	141
$\chi^2_\alpha(100)$	59.9	61.9	67.3	70.1	74.2	77.9	124	130	136	140	149	153

Tabell 5: F-fördelningens kvantiler

Tabellerna på följande sidor visar tal $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ så att $P(X > F_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha$ där $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$.

ν_1	α	ν_2											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.025	647	38.5	17.4	12.2	10.0	8.81	8.07	7.57	7.20	6.93	6.72	6.55
	0.050	161	18.5	10.1	7.70	6.60	5.98	5.59	5.31	5.11	4.96	4.84	4.74
	0.950	.006	.005	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004
	0.975	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
2	0.025	799	39	16.0	10.6	8.43	7.26	6.54	6.05	5.71	5.45	5.25	5.09
	0.050	199	19	9.55	6.94	5.78	5.14	4.73	4.45	4.25	4.10	3.98	3.88
	0.950	.054	.052	.052	.052	.051	.051	.051	.051	.051	.051	.051	.051
	0.975	.026	.025	.025	.025	.025	.025	.025	.025	.025	.025	.025	.025
3	0.025	864	39.1	15.4	9.97	7.76	6.59	5.89	5.41	5.07	4.82	4.63	4.47
	0.050	215	19.1	9.27	6.59	5.40	4.75	4.34	4.06	3.86	3.70	3.58	3.49
	0.950	.098	.104	.107	.109	.110	.111	.112	.113	.113	.113	.114	.114
	0.975	.057	.062	.064	.066	.067	.067	.068	.068	.069	.069	.069	.069
4	0.025	899	39.2	15.1	9.60	7.38	6.22	5.52	5.05	4.71	4.46	4.27	4.12
	0.050	224	19.2	9.11	6.38	5.19	4.53	4.12	3.83	3.63	3.47	3.35	3.25
	0.950	.129	.144	.151	.156	.159	.162	.164	.165	.166	.167	.168	.169
	0.975	.081	.093	.100	.104	.106	.108	.110	.111	.112	.113	.113	.114
5	0.025	921	39.3	14.8	9.36	7.14	5.98	5.28	4.81	4.48	4.23	4.04	3.89
	0.050	230	19.3	9.01	6.25	5.05	4.38	3.97	3.68	3.48	3.32	3.20	3.10
	0.950	.151	.172	.184	.192	.198	.202	.205	.207	.209	.211	.212	.213
	0.975	.099	.118	.128	.135	.139	.143	.145	.148	.149	.151	.152	.153
6	0.025	937	39.3	14.7	9.19	6.97	5.82	5.11	4.65	4.32	4.07	3.88	3.72
	0.050	234	19.3	8.94	6.16	4.95	4.28	3.86	3.58	3.37	3.21	3.09	2.99
	0.950	.167	.194	.210	.220	.227	.233	.237	.241	.244	.246	.248	0.25
	0.975	.113	.137	.151	.160	.167	.171	.175	.178	.181	.183	.184	.186
7	0.025	948	39.3	14.6	9.07	6.85	5.69	4.99	4.52	4.19	3.95	3.75	3.60
	0.050	236	19.3	8.88	6.09	4.87	4.20	3.78	3.5	3.29	3.13	3.01	2.91
	0.950	.178	.211	.230	.242	.251	.258	.264	.268	.272	.275	.277	.279
	0.975	.123	.152	.169	.181	.189	.195	.200	.204	.207	0.21	.212	.214
8	0.025	956	39.3	14.5	8.98	6.75	5.6	4.89	4.43	4.10	3.85	3.66	3.51
	0.050	238	19.3	8.84	6.04	4.81	4.14	3.72	3.43	3.23	3.07	2.94	2.84
	0.950	.188	.224	.245	.260	.271	.279	.285	.290	.295	.298	.301	.304
	0.975	.132	.165	.184	.197	.207	.215	.220	.225	.229	.232	.235	.238
9	0.025	963	39.3	14.4	8.90	6.68	5.52	4.82	4.35	4.02	3.77	3.58	3.43
	0.050	240	19.3	8.81	5.99	4.77	4.09	3.67	3.38	3.17	3.02	2.89	2.79
	0.950	.195	.234	.258	.275	.287	.296	.303	.309	.314	.318	.322	.325
	0.975	.138	.175	.196	.212	.223	.231	.238	.243	.248	.252	.255	.258
10	0.025	968	39.4	14.4	8.84	6.61	5.46	4.76	4.29	3.96	3.71	3.52	3.37
	0.050	241	19.4	8.78	5.96	4.73	4.06	3.63	3.34	3.13	2.97	2.85	2.75
	0.950	.201	.243	.269	.287	.300	.310	.318	.325	.331	.335	.339	.343
	0.975	.144	.183	.207	.223	.236	.245	.253	.259	.264	.269	.272	.276
11	0.025	973	39.4	14.3	8.79	6.56	5.41	4.70	4.24	3.91	3.66	3.47	3.32
	0.050	243	19.4	8.76	5.93	4.70	4.02	3.60	3.31	3.10	2.94	2.81	2.71
	0.950	.206	.251	.278	.297	.312	.323	.332	.339	.345	.350	.354	.358
	0.975	.148	.190	.216	.233	.247	.257	.266	.272	.278	.283	.287	.291
12	0.025	976	39.4	14.3	8.75	6.52	5.36	4.66	4.2	3.86	3.62	3.43	3.27
	0.050	243	19.4	8.74	5.91	4.67	4	3.57	3.28	3.07	2.91	2.78	2.68
	0.950	.210	.257	.286	.306	.322	.333	.343	.351	.357	.363	.368	.372
	0.975	.152	.196	.223	.242	.257	.268	.277	.284	.291	.296	.301	.305

ν_1	α	ν_2											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	0.025	979	39.4	14.3	8.71	6.48	5.32	4.62	4.16	3.83	3.58	3.39	3.23
	0.050	244	19.4	8.72	5.89	4.65	3.97	3.55	3.25	3.04	2.88	2.76	2.66
	0.950	.214	.262	.293	.314	.330	.343	.353	.361	.368	.374	.379	.384
	0.975	.155	.201	0.23	.250	.265	.277	.287	.295	.301	.307	.312	.317
14	0.025	982	39.4	14.2	8.68	6.45	5.29	4.59	4.13	3.79	3.55	3.35	3.20
	0.050	245	19.4	8.71	5.87	4.63	3.95	3.52	3.23	3.02	2.86	2.73	2.63
	0.950	.217	.267	.299	.321	.338	.351	.361	.370	.378	.384	.389	.394
	0.975	.158	.205	.235	.256	.273	.285	.295	.304	.311	.317	.323	.327
15	0.025	984	39.4	14.2	8.65	6.42	5.26	4.56	4.10	3.76	3.52	3.33	3.17
	0.050	245	19.4	8.70	5.85	4.61	3.93	3.51	3.21	3.00	2.84	2.71	2.61
	0.950	.220	.271	.304	.327	.344	.358	.369	.378	.386	.393	.398	.404
	0.975	.161	.209	.240	.262	.279	.292	.303	.312	.320	.326	.332	.337
20	0.025	993	39.4	14.1	8.56	6.32	5.16	4.46	3.99	3.66	3.41	3.22	3.07
	0.050	248	19.4	8.66	5.80	4.55	3.87	3.44	3.15	2.93	2.77	2.64	2.54
	0.950	.229	.286	.322	.348	.368	.384	.397	.408	.417	.425	.432	.439
	0.975	.170	.224	.259	.284	.304	.319	.332	.343	.352	.360	.367	.373
25	0.025	998	39.4	14.1	8.50	6.26	5.10	4.40	3.93	3.60	3.35	3.16	3.00
	0.050	249	19.4	8.63	5.76	4.52	3.83	3.40	3.10	2.89	2.73	2.60	2.49
	0.950	.235	.295	.334	.362	.384	.401	.415	.427	.438	.447	.455	.461
	0.975	.175	.233	.270	.298	.319	.336	.351	.363	.373	.382	.390	.397
30	0.025	1001	39.4	14.0	8.46	6.22	5.06	4.36	3.89	3.56	3.31	3.11	2.96
	0.050	250	19.4	8.61	5.74	4.49	3.80	3.37	3.07	2.86	2.7	2.57	2.46
	0.950	.239	.301	.342	.371	.394	.413	.428	.441	.452	.462	.470	.478
	0.975	.179	.239	.278	.307	.330	.348	.364	.377	.388	.398	.406	.414
40	0.025	1006	39.4	14.0	8.41	6.17	5.01	4.30	3.84	3.50	3.25	3.06	2.90
	0.050	251	19.4	8.59	5.71	4.46	3.77	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.42
	0.950	.244	.309	.352	.383	.408	.428	.444	.458	.470	.481	.490	.499
	0.975	.184	.246	.288	.319	.344	.364	.381	.395	.407	.418	.428	.437
60	0.025	1010	39.4	13.9	8.36	6.12	4.95	4.25	3.78	3.44	3.19	3.00	2.84
	0.050	252	19.4	8.57	5.68	4.43	3.74	3.30	3.00	2.78	2.62	2.49	2.38
	0.950	.249	.317	.362	.396	.422	.443	.461	.476	.490	.501	.512	.521
	0.975	.189	.254	.299	.332	.358	.380	.398	.414	.428	.440	.451	.461
80	0.025	1012	39.4	13.9	8.33	6.09	4.93	4.22	3.75	3.42	3.16	2.97	2.81
	0.050	252	19.4	8.56	5.67	4.41	3.72	3.28	2.98	2.76	2.60	2.46	2.36
	0.950	.252	.321	.367	.402	.429	.451	.470	.486	.500	.512	.523	.533
	0.975	.191	.258	.304	.338	.366	.389	.408	.424	.439	.451	.463	.473
100	0.025	1013	39.4	13.9	8.31	6.08	4.91	4.21	3.73	3.40	3.15	2.95	2.8
	0.050	253	19.4	8.55	5.66	4.40	3.71	3.27	2.97	2.75	2.58	2.45	2.35
	0.950	.254	.323	.371	.406	.433	.456	.475	.492	.506	.519	.530	.540
	0.975	.193	.261	.307	.342	.370	.394	.413	.430	.445	.458	.470	.481
120	0.025	1014	39.4	13.9	8.30	6.06	4.90	4.19	3.72	3.39	3.14	2.94	2.78
	0.050	253	19.4	8.54	5.65	4.39	3.70	3.26	2.96	2.74	2.58	2.44	2.34
	0.950	.255	.325	.373	.408	.436	.459	.479	.495	.510	.523	.535	.545
	0.975	.194	.262	.309	.345	.374	.397	.417	.434	.450	.463	.475	.486
∞	0.025	1018	39.5	13.9	8.25	6.01	4.84	4.14	3.67	3.33	3.08	2.88	2.72
	0.050	254	19.5	8.52	5.62	4.36	3.66	3.23	2.92	2.70	2.53	2.40	2.29
	0.950	.260	.333	.383	.421	.451	.476	.497	.515	.531	.546	.559	.570
	0.975	.199	.271	.320	.359	.389	.415	.437	.456	.473	.488	.501	.514

ν_1	α	ν_2											
		13	14	15	20	25	30	40	60	80	100	120	∞
1	0.025	6.41	6.29	6.2	5.87	5.68	5.56	5.42	5.28	5.21	5.17	5.15	5.02
	0.050	4.66	4.6	4.54	4.35	4.24	4.17	4.08	4.00	3.96	3.93	3.92	3.84
	0.950	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.003	.003
	0.975	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
2	0.025	4.96	4.85	4.76	4.46	4.29	4.18	4.05	3.92	3.86	3.82	3.80	3.68
	0.050	3.80	3.73	3.68	3.49	3.38	3.31	3.23	3.15	3.11	3.08	3.07	2.99
	0.950	.051	.051	.051	.051	.051	.051	.051	.051	.051	.051	.051	.051
	0.975	.025	.025	.025	.025	.025	.025	.025	.025	.025	.025	.025	.025
3	0.025	4.34	4.24	4.15	3.85	3.69	3.58	3.46	3.34	3.28	3.25	3.22	3.11
	0.050	3.41	3.34	3.28	3.09	2.99	2.92	2.83	2.75	2.71	2.69	2.68	2.60
	0.950	.114	.114	.114	.115	.115	.116	.116	.116	.116	.116	.117	.117
	0.975	.069	.070	.070	.070	.070	.071	.071	.071	.071	.071	.071	.071
4	0.025	3.99	3.89	3.80	3.51	3.35	3.25	3.12	3.00	2.95	2.91	2.89	2.78
	0.050	3.17	3.11	3.05	2.86	2.75	2.69	2.60	2.52	2.48	2.46	2.44	2.37
	0.950	.169	.170	.170	.172	.173	.174	.174	.175	.176	.176	.176	.177
	0.975	.114	.115	.115	.116	.117	.118	.118	.119	0.12	.120	.120	.121
5	0.025	3.76	3.66	3.57	3.28	3.12	3.02	2.90	2.78	2.73	2.69	2.67	2.56
	0.050	3.02	2.95	2.90	2.71	2.60	2.53	2.44	2.36	2.32	2.30	2.29	2.21
	0.950	.214	.215	.216	.219	.221	.222	.224	.225	.226	.227	.227	.229
	0.975	.154	.154	.155	.158	.159	.160	.161	.163	.164	.164	.164	.166
6	0.025	3.60	3.50	3.41	3.12	2.96	2.86	2.74	2.62	2.57	2.53	2.51	2.40
	0.050	2.91	2.84	2.79	2.59	2.49	2.42	2.33	2.25	2.21	2.19	2.17	2.09
	0.950	.251	.252	.253	.258	.260	.262	.265	.267	.268	.269	.269	.272
	0.975	.187	.188	.189	.193	.195	.197	.199	.201	.202	.203	.203	.206
7	0.025	3.48	3.38	3.29	3.00	2.84	2.74	2.62	2.50	2.45	2.41	2.39	2.28
	0.050	2.83	2.76	2.70	2.51	2.40	2.33	2.24	2.16	2.12	2.10	2.08	2.01
	0.950	.281	.283	.284	.290	.293	.296	.299	.302	.304	.305	.306	.309
	0.975	.216	.217	.218	.223	.227	.229	.232	.235	.236	.237	.238	.241
8	0.025	3.38	3.28	3.19	2.91	2.75	2.65	2.52	2.41	2.35	2.32	2.29	2.19
	0.050	2.76	2.69	2.64	2.44	2.33	2.26	2.18	2.09	2.05	2.03	2.01	1.93
	0.950	.306	.308	.310	.317	.321	.324	.328	.332	.334	.336	.337	.341
	0.975	.240	.242	.243	0.25	.254	.256	.260	.264	.266	.267	.268	.272
9	0.025	3.31	3.20	3.12	2.83	2.67	2.57	2.45	2.33	2.27	2.24	2.22	2.11
	0.050	2.71	2.64	2.58	2.39	2.28	2.21	2.12	2.04	1.99	1.97	1.95	1.88
	0.950	.328	.330	.332	.340	.345	.349	.353	.358	.361	.362	.364	.369
	0.975	.261	.263	.265	.272	.277	.280	.285	.289	.292	.293	.294	0.3
10	0.025	3.25	3.14	3.06	2.77	2.61	2.51	2.38	2.27	2.21	2.17	2.15	2.04
	0.050	2.67	2.60	2.54	2.34	2.23	2.16	2.07	1.99	1.95	1.92	1.91	1.83
	0.950	.346	.349	.351	.360	.366	.370	.375	.381	.384	.386	.387	.394
	0.975	.279	.281	.284	.292	.298	.302	.307	.312	.315	.317	.318	.324
11	0.025	3.19	3.09	3.00	2.72	2.56	2.45	2.33	2.21	2.15	2.12	2.10	1.99
	0.050	2.63	2.56	2.50	2.31	2.19	2.12	2.03	1.95	1.91	1.88	1.86	1.78
	0.950	.362	.365	.367	.377	.384	.389	.395	.401	.405	.407	.408	.415
	0.975	.294	.297	.300	0.31	.316	.320	.326	.332	.336	.338	.339	.346
12	0.025	3.15	3.05	2.96	2.67	2.51	2.41	2.28	2.16	2.11	2.07	2.05	1.94
	0.050	2.60	2.53	2.47	2.27	2.16	2.09	2.00	1.91	1.87	1.85	1.83	1.75
	0.950	.375	.379	.382	.393	.400	.405	.412	.419	.423	.425	.427	.435
	0.975	.308	.311	.314	.325	.332	.337	.344	.351	.354	.357	.358	.367

ν_1	α	ν_2											
		13	14	15	20	25	30	40	60	80	100	120	∞
13	0.025	3.11	3.01	2.92	2.63	2.47	2.37	2.24	2.12	2.07	2.03	2.01	1.90
	0.050	2.57	2.50	2.44	2.25	2.13	2.06	1.97	1.88	1.84	1.81	1.80	1.72
	0.950	.388	.391	.394	.406	.414	.420	.427	.435	.439	.442	.444	.453
	0.975	.321	.324	.327	.339	.347	.352	.359	.367	.371	.374	.376	.385
14	0.025	3.08	2.97	2.89	2.60	2.44	2.33	2.21	2.09	2.03	2	1.97	1.86
	0.050	2.55	2.48	2.42	2.22	2.11	2.03	1.94	1.86	1.81	1.79	1.77	1.69
	0.950	.398	.402	.406	.418	.427	.433	.441	.449	.454	.457	.459	.469
	0.975	.332	.335	.339	.351	0.36	.366	.373	.382	.387	.389	.391	.402
15	0.025	3.05	2.94	2.86	2.57	2.41	2.30	2.18	2.06	2.00	1.96	1.94	1.83
	0.050	2.53	2.46	2.40	2.20	2.08	2.01	1.92	1.83	1.79	1.76	1.75	1.66
	0.950	.408	.412	.416	.429	.438	.445	.453	.462	.467	.470	.473	.484
	0.975	.341	.345	.349	.362	.371	.378	.386	.396	.401	.404	.406	.417
20	0.025	2.94	2.84	2.75	2.46	2.3	2.19	2.06	1.94	1.88	1.84	1.82	1.70
	0.050	2.45	2.38	2.32	2.12	2.00	1.93	1.83	1.74	1.70	1.67	1.65	1.57
	0.950	.444	.449	.453	.470	.482	.490	.501	.513	.520	.524	.527	.542
	0.975	.379	.384	.388	.405	.417	.425	.437	.449	.456	.460	.463	.479
25	0.025	2.88	2.77	2.68	2.39	2.23	2.12	1.99	1.86	1.80	1.77	1.74	1.62
	0.050	2.41	2.34	2.28	2.07	1.95	1.87	1.78	1.69	1.64	1.61	1.59	1.50
	0.950	.468	.473	.478	.498	.511	.521	.534	.548	.556	.562	.565	.584
	0.975	.403	.409	.414	.434	.448	.458	.472	.487	.495	.501	.504	.524
30	0.025	2.83	2.73	2.64	2.34	2.18	2.07	1.94	1.81	1.75	1.71	1.69	1.56
	0.050	2.38	2.30	2.24	2.03	1.91	1.84	1.74	1.64	1.60	1.57	1.55	1.45
	0.950	.484	.490	.496	.517	.532	.543	.558	.574	.584	0.59	.594	.616
	0.975	.421	.427	.433	.455	.470	.482	.497	.515	.525	.531	.535	.559
40	0.025	2.78	2.67	2.58	2.28	2.11	2.00	1.87	1.74	1.67	1.64	1.61	1.48
	0.050	2.33	2.26	2.20	1.99	1.87	1.79	1.69	1.59	1.54	1.51	1.49	1.39
	0.950	.506	.513	.519	.543	.560	.573	.590	.610	.622	.629	.634	.662
	0.975	.444	.451	.458	.483	.501	.514	.533	.554	.566	.574	0.58	.610
60	0.025	2.72	2.61	2.52	2.22	2.05	1.94	1.80	1.66	1.59	1.55	1.53	1.38
	0.050	2.29	2.22	2.16	1.94	1.82	1.74	1.63	1.53	1.48	1.45	1.42	1.31
	0.950	.529	.537	.544	.572	.591	.606	.627	.651	.665	.675	.681	.719
	0.975	.469	.477	.485	.514	.535	.550	.573	0.6	.615	.625	.632	.674
80	0.025	2.69	2.58	2.49	2.19	2.01	1.90	1.76	1.62	1.55	1.51	1.48	1.33
	0.050	2.27	2.20	2.13	1.92	1.79	1.71	1.60	1.50	1.44	1.41	1.39	1.27
	0.950	.542	.550	.557	.587	.608	.624	.647	.674	.690	.701	.708	.754
	0.975	.483	.491	.499	.530	.553	.570	.595	.625	.643	.654	.663	.714
100	0.025	2.67	2.56	2.47	2.17	1.99	1.88	1.74	1.59	1.52	1.48	1.45	1.29
	0.050	2.26	2.18	2.12	1.90	1.77	1.69	1.58	1.48	1.42	1.39	1.36	1.24
	0.950	.549	.558	.565	.596	.618	.635	0.66	.689	.706	.718	.726	.779
	0.975	.491	0.5	.508	.541	.564	.583	.609	.642	.661	.674	.683	.742
120	0.025	2.65	2.55	2.46	2.15	1.98	1.86	1.72	1.58	1.50	1.46	1.43	1.26
	0.050	2.25	2.17	2.11	1.89	1.76	1.68	1.57	1.46	1.41	1.37	1.35	1.22
	0.950	.554	.563	.571	.602	.625	.643	.668	.699	.718	.730	.739	.797
	0.975	.496	.505	.514	.548	.572	.591	.619	.653	.674	.688	.698	.763
∞	0.025	2.59	2.48	2.39	2.08	1.90	1.78	1.63	1.48	1.4	1.34	1.31	1
	0.050	2.20	2.13	2.06	1.84	1.71	1.62	1.50	1.38	1.32	1.28	1.25	1
	0.950	.581	.591	.600	.636	.664	.685	.717	.758	.785	.804	.818	1
	0.975	.525	.536	.545	.585	.615	.638	.674	.720	.750	.771	.788	1