
Lärare och Jour: David Bolin, telefon 772 53 75.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och Chalmers-godkänd miniräknare.

Korrekt, väl motiverad lösning ger poängen som är indikerad i parentes vid vardera uppgift. Totalt kan man få 40 poäng och betygsgränserna för betyg 3, 4 och 5 är 16, 24 och 32 poäng.

1. I en föreläsningssal ligger tre whiteboardpennor i olika färger. Pennorna fungerar, oberoende av varandra, med sannolikhet 0.9 för den röda, 0.8 för den blå och 0.4 för den svarta.

(a) Vad är sannolikheten att ingen av pennorna fungerar? (1p)

(b) Föreläsaren tar slumpmässigt upp en av pennorna för att skriva på tavlan. Vad är sannolikheten att den valda pennan fungerar? (2p)

(c) Antag att den valda pennan fungerar. Beräkna den betingade sannolikheten för att pennan är röd givet att den fungerar. Beräkna också motsvarande sannolikheter för de två andra färgerna. (2p)

2. En fabrik som tillverkar smörpaket har en maskin som fyller paketen med smör. Antag att maskinen fyller paketen så att vikten på ett slumpvis valt paket är normalfördelad $N(\mu, \sigma^2)$. För att skatta μ och σ mäter man vikten på 10 paket med följande resultat (enhet gram):

501, 480, 499, 506, 495, 492, 483, 501, 488, 488

(a) Använd datan för att skatta μ och σ , och testa $H_0 : \mu = 500$ mot $H_1 : \mu < 500$ på nivå $\alpha = 0.05$. (3p)

(b) Antag att vikten på ett slumpvis valt paket är $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$, där $\hat{\mu}$ och $\hat{\sigma}^2$ är de skattade värdena från (a). Beräkna d så att ett slumpvis valt paket med sannolikhet 0.95 har en vikt som ligger i intervallet $I = (\hat{\mu} - d, \hat{\mu} + d)$. (2p)

3. Antalet vita blodkroppar hos 1 mm³ blod från en viss person är Po(6000)-fördelat.

(a) Beräkna sannolikheten att en bloddroppe av storlek 1 mm³ innehåller färre än 5800 vita blodkroppar. Motivera eventuella approximationer. (2p)

(b) Man tar 1 ml blod från personen och späder den med koksaltlösning till volymen 1 liter. Därefter tar man ut en droppe av storlek 1mm³. Antalet blodkroppar i denna droppe är också Poissonfördelat, men vad är dess väntevärde? Beräkna sannolikheten att den innehåller färre än 5 vita blodkroppar. (3p)

4. Man utför ett belastningsprov på en metalldel i en motor. För sex olika belastningar bestämmer man dragförlängningen som delen uppvisar. Resultaten visas i följande tabell

i	1	2	3	4	5	6
Belastning x_i (kN)	1.1	2.2	3.6	4.0	5.3	5.8
Dragförlängning y_i (10 ⁻² mm)	15.5	51.6	72.3	79.4	110.9	124.0

Som modell ansätts $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ där $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

(a) Skatta β_0 och β_1 och beräkna 95% konfidensintervall för β_0 och β_1 . (3p)

(b) Beräkna ett 95% konfidensintervall för den förväntade dragförlängningen vid 3kN belastning. (1p)

(c) Beräkna ett 95% prediktionsintervall för dragförlängningen vid 3kN belastning. (1p)

5. För en viss grundkurs i statistik var resultatet på tentorna 2017 och 2018 följande:

	Antal godkända	Antal underkända
2017	28	23
2018	39	21

Antag att varje student oberoende klarar tentan med en viss sannolikhet $p_{\text{år}}$ som möjligen varierar mellan åren.

(a) Vilken fördelning har antalet studenter som klarar tentan ett visst år? (1p)

(b) Härled maximum likelihood-skattningen $p_{\text{år}}^*$ av $p_{\text{år}}$ baserat på en observation x . (3p)

(c) Är $p_{\text{år}}^*$ väntevärdesriktig? Vad är dess varians? (2p)

(d) Använd uttrycket för $p_{\text{år}}^*$ för att skatta sannolikheterna p_{2017} och p_{2018} för att klara tentan 2017 respektive 2018. (1p)

(e) Tyder resultaten på att sannolikheten att klara tentan var olika de två åren? Utför ett hypotestest på nivå $\alpha = 0.05$ för att undersöka detta. Kom ihåg att skriva upp hypotesen som testas och motivera alla eventuella approximationer som används. (3p)

6. Man vill undersöka om det finns någon skillnad mellan livslängden hos två olika fabrikat av batterier. För Märke A mäts livslängden för 7 batterier (i enhet timmar) med följande resultat:

11.2, 10.0, 9.6, 10.3, 11.0, 12.2, 12.2.

För Märke B görs motsvarande mätningar på 6 batterier med följande resultat:

8.4, 8.0, 12.4, 10.4, 9.2, 9.1.

(a) Utför ett hypotestest för att undersöka om varianserna är olika hos de två märkena. (3p)

(b) Utför ett hypotestest för att undersöka om väntevärdena är olika hos de två märkena. (3p)

(c) Ett alternativ till testet i (b) är att använda Wilcoxons ranksummetest. Vad är anledningen till att detta test kan vara att föredra? Beskriv hur man utför testet, vad som testas och vilken teststorhet används. (2p)

(d) Utför Wilcoxons ranksummetest för batteridatan. (2p)

För varje test ovan, kom ihåg att skriva upp hypotesen som testas och använd signifikansnivå $\alpha = 0.05$. På nästa sida finns tabellen från kursboken med de kritiska värdena för teststorheten för Wilcoxons ranksummetest.

Lycka till!

TABLE X
Wilcoxon rank-sum test

$m = 3(1)25$ and $n = m(1)m + 25$ $P = .025$ one-sided; $P = .05$ two-sided												
n	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$	$m = 10$	$m = 11$	$m = 12$	$m = 13$	$m = 14$
$n = m$	5,16	11,25	18,37	26,52	37,68	49,87	63,108	79,131	96,157	116,184	137,214	160,246
$n = m + 1$	6,18	12,28	19,41	28,56	39,73	51,93	66,114	82,138	100,164	120,192	141,223	165,255
$n = m + 2$	6,21	12,32	20,45	29,61	41,78	54,98	68,121	85,145	103,172	124,200	146,231	170,264
$n = m + 3$	7,23	13,35	21,49	31,65	43,83	56,104	71,127	88,152	107,179	128,208	150,240	174,274
$n = m + 4$	7,26	14,38	22,53	32,70	45,88	58,110	74,133	91,159	110,187	131,217	154,249	179,283
$n = m + 5$	8,28	15,41	24,56	34,74	46,94	61,115	77,139	94,116	114,194	135,225	159,257	184,292
$n = m + 6$	8,31	16,44	25,60	36,78	48,99	63,121	79,146	97,173	118,201	139,233	163,266	189,301
$n = m + 7$	9,33	17,47	26,64	37,83	50,104	65,127	82,152	101,179	121,209	143,241	168,274	194,310
$n = m + 8$	10,35	17,51	27,68	39,87	52,109	68,132	85,158	104,186	125,216	147,249	172,283	198,320
$n = m + 9$	10,38	18,54	29,71	41,91	54,114	70,138	88,164	107,193	128,224	151,257	176,292	203,329
$n = m + 10$	11,40	19,57	30,75	42,96	56,119	72,144	90,171	110,200	132,231	155,265	181,300	208,338
$n = m + 11$	11,43	20,60	31,79	44,100	58,124	75,149	93,177	113,207	135,239	159,273	185,309	213,347
$n = m + 12$	12,45	21,63	32,83	45,105	60,129	77,155	96,183	117,213	139,246	163,281	190,317	218,356
$n = m + 13$	12,48	22,66	33,87	47,109	62,134	80,160	99,189	120,220	143,253	167,289	194,326	222,366
$n = m + 14$	13,50	23,69	35,90	49,113	64,139	82,166	101,196	123,227	146,261	171,297	198,335	227,375
$n = m + 15$	13,53	24,72	36,94	50,118	66,144	84,172	104,202	126,234	150,268	175,305	203,343	232,384
$n = m + 16$	14,55	24,76	37,98	52,122	68,149	87,177	107,208	129,241	153,276	179,313	207,352	237,393
$n = m + 17$	14,58	25,79	38,102	53,127	70,154	89,183	110,214	132,248	157,283	183,321	212,360	242,402
$n = m + 18$	15,60	26,82	40,105	55,131	72,159	91,188	113,220	136,254	161,290	187,329	216,369	247,411
$n = m + 19$	15,63	27,85	41,109	57,135	74,164	94,194	115,227	139,261	164,298	191,337	221,377	252,420
$n = m + 20$	16,65	28,88	42,113	58,140	76,169	96,200	118,233	142,268	168,305	195,345	225,286	256,430
$n = m + 21$	16,68	29,91	43,117	60,144	78,174	99,205	121,239	145,275	171,313	199,353	229,395	261,439
$n = m + 22$	17,70	30,94	45,120	61,149	80,179	101,211	124,245	148,282	175,320	203,361	234,403	266,448
$n = m + 23$	17,73	31,97	46,124	63,153	82,184	103,217	127,251	152,288	179,327	207,369	238,412	271,457
$n = m + 24$	18,75	31,101	47,128	65,157	84,189	106,222	129,258	155,295	182,335	211,377	243,420	276,466
$n = m + 25$	18,78	32,104	48,132	66,162	86,194	108,228	132,264	158,302	186,342	216,384	247,429	281,475