

---

Lärare och Jour: David Bolin, telefon 772 53 75.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och Chalmers-godkänd miniräknare.

Korrekt, väl motiverad lösning ger poängen som är indikerad i parentes vid vardera uppgift. Totalt kan man få 40 poäng och betygsgränserna för betyg 3, 4 och 5 är 16, 24 och 32 poäng.

---

1. (a) Låt  $X$  och  $Y$  vara två slumpvariabler så att  $X \sim N(3, 1)$ ,  $X - Y \sim N(1, 2^2)$  och  $C(X, Y) = 0.3$ . Beräkna  $P(0 \leq Y \leq 1)$ . (3p)
- (b) Antag att  $A$  och  $B$  är två händelser så att  $P(A) = 0.5$ ,  $P(A|B) = 0.7$  och  $P(A \cap B) = 0.4$ . Bestäm  $P(B|A)$ . (2p)
2. Av erfarenhet vet man att antalet viltolyckor per år längs en viss vägsträcka är  $Po(5)$ -fördelat.
  - (a) Beräkna sannolikheten för att det inte inträffar några viltolyckor under ett år. (1p)
  - (b) Efter 6 månader under 2019 gör man en sammanställning och ser att 7 viltolyckor redan har inträffat längs vägen. Vad är sannolikheten att det vid årets slut kommer ha inträffat max 10 olyckor? (2p)
  - (c) Använd direktmetoden för att testa om de 7 olyckorna under de 6 första månaderna visar på att intensiteten verkar ha ökat från  $\mu = 5$ , på nivå  $\alpha = 0.05$ . (2p)
3. En biostatistiker har utfört ett experiment där instrument från fyra olika tillverkare användes för samma sorts mätning. Resultaten kan ses i följande tabell, där antalet mätningar med varje instrument visas, samt medelvärdet och standardavvikelsen av dessa mätningar.

	Antal mätningar	Medelvärde	Standardavvikelse
Instrument A	20	0.82	1.03
Instrument B	30	2.05	1.02
Instrument C	15	-0.41	0.85
Instrument D	25	3.09	0.92

Använd denna data för att undersöka om det finns en signifikant skillnad i förväntat värde hos de fyra instrumenten:

- (a) Beräkna variansanalystabellen för försöket. (4p)
- (b) Formulera exakt vad som testas och utför hypotestestet på nivå  $\alpha = 0.05$ . (1p)
4. Ett företag som sysslar med så kallade escape rooms funderar på att bygga ut sin anläggning med ett nytt spel som är designat för tre till sex personer. Baserat på statistik från deras existerande spel vet de att antalet personer per bokning har en fördelning som beskrivs av sannolikhetsfunktionen  $p(k)$  enligt följande tabell.

$k$	3	4	5	6
$p(k)$	0.2	0.4	0.3	0.1

- (a) Beräkna väntevärde och varians för antalet personer per bokning. (2p)
- (b) Företaget räknar med att det nya spelet får 150 bokningar per månad. Hur mycket måste de ta betalt per person i sällskapen som bokar om de med 95% sannolikhet ska få in mer än 150000kr per månad i intäkter på spelet? (3p)

5. Laplace( $a, b$ )-fördelningen används i många olika sammanhang som ett alternativ till normalfördelningen. Den har parametrar  $a \in \mathbb{R}$  och  $b > 0$  och täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-a|}{b}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestäm  $E(X)$  och  $V(X)$  om  $X \sim \text{Laplace}(a, b)$ . (3p)
- (b) För normalfördelningen har vi ” $2\sigma$ -regeln” som säger att  $P(|Z| < 2\sigma) \approx 0.95$  om  $Z \sim N(0, \sigma^2)$ . Bestäm motsvarande regel för laplacefördelningen. Alltså, bestäm  $c$  så att  $P(|X| < c\sigma) = 0.95$  om  $X \sim \text{Laplace}(a, b)$  där  $a$  och  $b$  är valda så att  $E(X) = 0$  och  $V(X) = \sigma^2$ . (2p)
- (c) Antag att vi har ett stickprov av 20 oberoende observationer  $x_1, \dots, x_{20}$  från en laplacefördelad slumpvariabel, med  $\sum_{i=1}^{20} x_i = 41.0826$  och  $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 168.1446$ . Använd momentmetoden för att skatta  $a$  och  $b$  baserat på stickprovet. (2p)
- (d) Visa att skattningen av  $a$  i uppgift (c) är väntevärdesriktig och beräkna ett konfidensintervall för  $a$  med approximativ konfidensgrad 95%. (3p)
6. Malin ska flytta utomlands och är lite orolig för att staden dit hon ska flytta har mer luftföroreningar än Göteborg. Under en veckas tid tittar hon varje dag på en hemsida som rapporterar dagliga värden PM2.5 (enhet  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ). Resultaten ses i följande tabell

	Måndag	Tisdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	Lördag	Söndag
Göteborg	10.2	9.1	9.8	7.3	11.7	12.6	9.8
Ny stad	14.8	8.4	5.3	17.2	7.3	9.1	15.3

- (a) Undersök om variansen av PM2.5 skiljer sig signifikant mellan de två städerna. Använd signifikansnivå  $\alpha = 0.05$ . (3p)
- (b) Undersök om väntevärdet av PM2.5 är signifikant högre i den nya staden. Använd signifikansnivå  $\alpha = 0.05$ . (3p)
- (c) WHO har som riktvärde att medelhalten PM2.5 inte bör överstiga  $10 \mu\text{g}/\text{m}^3$ . Under antagandet från modellen i (b), skatta sannolikheten att väntevärdet av PM2.5 i den nya staden överskrider detta värde. (2p)
- (d) Ett problem med testerna ovan är att deras styrka antagligen inte är speciellt hög. Förklara vad ett hypotestests styrka är och förklara vad styrkefunktionen för testet i (c) visar. Skissa även hur styrkefunktionen bör se ut. (2p)

---

**Lycka till!**