Inlämningsuppgift 2. Simuleringar

Inlämning 27/5 på föreläsningen.

Alla lösningar skall skrivas och lämnas in individuellt. Jag uppmuntrar till diskussioner, men alltför lika (kopierade) inlämningar ger avdrag. Låna därför inte ut dina lösningar till någon annan.

Lämna in lösningen senast på föreläsningen 27/5 klockan 17. Det går bra att skicka in lösningen via mail (till broman 'at' chalmers.se), men den måste då vara skriven i en texteditor och skickas in i pdf-format med filnamn: Inl2_"förochefternamn"_TMA321.pdf.

Skriv ert namn på inlämningen, det räcker ej med CID!

OBS: Inscannad handskriven text rättas ej. Sent inkomna lösningar rättas ej!!!!

Inlämningsuppgiften består av fyra uppgifter om maximalt 12 poäng. Följande bonuspoäng kan förtjänas:

Poäng	Bonus
0 – 5	0
5.5 – 7	0.5
7.5 – 9	1
9.5 – 11	1.5
11.5 – 12	2

En kort preliminär genomgång (behöver ej redovisas)

- Kommandot rand(n,m) genererar en $n \times m$ matris av oberoende värden dragna från en likformigt fördelad slumpvariabel $U[0, 1]$.
- Kommandot histcounts(R,E) paketerar punkterna i vektorn R i delar som definieras av vektorn E. Skriv "help histcounts" i Matlab och se till att du förstår vad som händer.
- Testkör R=rand(10000,1), låt E=0:0.05:1 och sedan N=histcounts(R,E). Kör sedan plot(E(1:length(E)-1)+0.025,N) och se hur resultatet ser ut.

OBS! Se till att du förstår hur Matlab fungerar i detta exempel innan du går vidare.

Det är viktigt att du redovisar noggrannt. Se t.ex. till att dina resultat stöds med lämpliga plottar. Du är fri att använda de kommandon som du finner lämpligast (hist, histcount etc), men se till att dina figurer illusterar de fenomen man vill urskilja. Matlab-kod skall bifogas men enbart som Appendix, ej i löpande text.

1. Låt X vara en slumpvariabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2} \text{ för } 0 \leq x \leq \pi. \tag{1}$$

   (a) Beskriv hur du kan gå tillväga för att generera värden dragna från en slumpvariabel med täthetsfunktion som i (1). (Tips: Läs igenom avsnittet om funktioner av slumpvariabler). (1p)

(b) Använd Matlab för att simulera n värden (för några lämpliga värden på n) med den ovan angivna fördelningen. Visualisera ditt resultat med hjälp av kommandot hist eller liknande i Matlab. (1p)

(c) Om vi simulerar n värden som i del (b) ovan, vilken sannolikhetsfördelning har slumpvariabeln Y som räknar antalet värden i din simulering som hamnar i intervallet $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$? (1p)

2. Vi skall nu fortsätta med simuleringar, men det går i en annan riktning. Vi låter även i denna uppgift X ha täthetsfunktion som i (1).

(a) Låt $n = 1000$ och generera n värden $x_1, \ldots, x_n$ som i uppgift 1 (dvs med täthetsfunktion f). Låt sedan

$$y_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Upprepa detta förfarande m gånger och spara resultaten i vektorn $y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]$. Använd t.ex. kommandot ”histcounts” för att visualisera resultatet. Hur förändras ditt resultat som funktion av m? (1p)

(b) Beräkna $\mu = \mathbb{E}[X]$ och $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ analytiskt. (1p)

(c) Låt $n = 1000$ och generera n värden $x_1, \ldots, x_n$ som i uppgift 1 (dvs med täthetsfunktion f). Låt sedan

$$z_1 = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Upprepa detta förfarande m gånger och spara resultaten i vektorn $z = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_m]$. Använd t.ex. kommandot ”histcounts” för att visualisera resultatet. Hur förändras ditt resultat som funktion av m? (1p)

3. Låt nu X vara en slumpvariabel med täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{3}{2x^{5/2}} \text{ för } 1 \leq x < \infty. \tag{2}$$

Gör om uppgift 2 fast nu med slumpvariabler med täthetsfunktion som i (2). Hur funkar det? (2p)

4. Numerisk integration.

(a) Använd Monte-Carlo simulering för att beräkna

$$\int_0^1 \cos(x) e^{-x^2} dx. \tag{3}$$

Tips: Kolla igenom lämpligt avsnitt från föreläsningen i samband med att vi gick igenom Stora Talens Lag. (1p)

(b) Generera en en vektor med n ekvidistanta punket mellan 0 och 1. Använd denna för att bestämma värdet av integralen i (3). Jämför med ditt svar i (a). (1p)

(c) Låt

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

så att S är en sfär i tre dimensioner. Betrakta funktionen

$$h(x, y, z) = x^2 e^{\sqrt{|y|}} |\cos(z)|.$$

Beräkna

$$\int_S h(x, y, z) dS$$

med hjälp av Monte-Carlo metoden. (1p)

(d) Hur skall man gå tillväga för att hitta en mängd bestående av n ekvidistanta punkter på S? Kan du hitta en approximativ metod? (1p)