Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik TMA321**

Tid: den 23 augusti, 2017
Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, egenhändigt skriven formelsamling om två A4 fram och bak (dvs 4 sidor), samt utdelade tabeller.

Tentamen består av 8 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:
betyg "3": 20 till 29 poäng
betyg "4": 30 till 39 poäng
betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad.

1. Antag att (X, Y) är likformigt fördelad på enhetsdisken dvs området $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (a) Ange den gemensamma sannolikhetstätheten för (X, Y). (2p)
   (b) Ange marginalfördelningarna för X och Y. (2p)
   (c) Beräkna $\mathbb{E}\left[X^2 Y I(Y \geq 0)\right]$. (3p)

2. Två kompisar, Kalle och Ada, står på ett hustak och kastar vattenballonger på förbipasserande. Sannolikheten att Kalle träffar kallar vi för p_K och sannolikheten att Ada träffar kallar vi för p_A. Vi antar också att sannolikheten för träff är oberoende mellan kasten. De kastar varannan gång och Ada får börja.
   (a) De bestämmer sig för att tävla mot varandra. Tävlingen är slut så fort någon har träffat. Vad är sannolikheten att Ada vinner? Kom ihåg att Ada börjar. (3p)
   (b) Vid ett senare tillfälle kastar de tills först Ada träffar och sedan Kalle träffar omedelbart därefter (så om Ada träffar och Kalle sedan missar fortsätter de). Vad är sannolikheten att de behöver exakt k kast tillsammans? (3p)
   (c) Sista gången gör de på följande sätt. Ada kastar tills första gången hon träffar, och Kalle kastar tills första gången han träffar. Vad är sannolikheten att de behöver sammanlagt k kast? (3p)

3. Låt $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ för $i = 1, 2$.
   (a) Beräkna mgf för T_1. (2p)
   (b) Använd svaret i uppgift (a) för att bestämma $\mathbb{E}[T_1^n]$ för alla $n \geq 1$. (2p)

(c) Låt X vara sådan att $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$ och X är oberoende av T_1, T_2. Beräkna mgf för Z där

$$Z = XT_1 + (1 - X)T_2.$$

(2p)

4. (a) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara i.i.d. med täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}\sin(\alpha x) \text{ för } 0 \leq x \leq \pi/2$$

där $\alpha > 0$ är en okänd parameter. Hitta MME (momentskattaren) för α. (3p)

(b) Låt $Y_1, \ldots, Y_n$ vara i.i.d. med täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{\beta}{e - 1}e^{\beta x} \text{ för } 0 \leq x \leq 1/\beta.$$

Hitta MLE (maximum likelihood skattaren) för β. (3p)

5. I en studie ville man jämföra två olika processer för tillverkning av formalin. I studien ville man speciellt jämföra halten av toxiska biprodukter och fick därför följande två mätserier över det toxiska innehållet (angett i ppm):

Metod nr 1 (x)	4.21	5.33	5.85	6.40	6.84	5.39	3.81	4.56
	4.24	7.65	4.68	6.05				

Metod nr 2 (y)	4.91	6.39	5.74	7.10	5.08	5.99	7.32	7.3
	6.92	5.79	5.60	5.59				

Vid alla mätningarna användes samma utrustning. Vi har även att

$$\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{12}(x_k - \bar{x})^2 \approx 1.273 \qquad \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{12}(y_k - \bar{y})^2 \approx 0.6395.$$

(a) Sätt upp ett test för att se om det finns en systematisk skillnad mellan metoderna. Välj signifikansnivån 5%. Antag att alla data är oberoende och kommer från normalfördelningar. (3p)

(b) Upprepa proceduren i (a) men nu under antagandet att data *ej* kommer från en normalfördelning. Hur skall du göra nu? Reflektera över din metod och ditt resultat. Jämför med vad du fick i uppgift (a). (3p)

6. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara i.i.d. exponentialfördelade slumpvariabler. Betrakta hypoteserna

$$H_0 : \lambda = 1 \text{ och } H_1 : \lambda \neq 1.$$

(a) Bestäm den generaliserade likelihood ration. Bestäm även motsvarande förkastningsregion. (3p)

(b) Vad förändras ifall vi byter ut H_1 mot

$$H_1' : \lambda = 2?$$

(2p)

7. Karl-Johan vill undersöka viskositeten i en svampstuvning som funktion av mängden maizena han har i stuvningen. Han fick följande data:

Halt:	10	12	14	16	18	20	22	24
Viskositet:	12.4	2.9	7.4	10.8	17.3	43.2	54.2	85.8

Data kan sammanfattas med $S_{xx} = 168, S_{yy} = 5953.88$, och $S_{xy} = 884.2$.

a. Ansätt en linjär regressionsmodell och skatta β_0, β_1. (2p)

b. Bestäm förklaringsgraden och beräkna residualerna. Verkar modellen rimlig? Verkar data rimliga? (3p)

8. Låt X_1, X_2, X_3 vara oberoende, alla med samma (okända) väntevärde μ. Låt vidare varianserna av X_1, X_2, X_3 vara $\sigma^2, 2\sigma^2$ respektive $3\sigma^2$ där $\sigma^2 > 0$. Låt vidare

$$\hat{\mu}_1 := \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$$\hat{\mu}_2 := (X_1 X_2)^{1/2}$$

och

$$\hat{\mu}_3 := \frac{X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3}{\frac{11}{6}}$$

vara tre skattningar av μ.

(a) Vilken eller vilka av dessa tre skattningarna är väntevärdesriktiga? (3p)

(b) Vilken av de väntevärdesriktiga skattningarna i (a) har minst varians? (3p)