Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik TMA321**

Tid: den 28 augusti, 2019
Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, egenhändigt skriven formelsamling om två A4 fram och bak (dvs 4 sidor), samt utdelade tabeller.

Tentamen består av 8 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:
betyg "3": 20 till 29 poäng
betyg "4": 30 till 39 poäng
betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad.

1. En bridgehand består av 13 kort dragna från en standardkortlek bestående av 52 kort. I systemet HCP (High Card Points) tilldelas ett äss 4 poäng, en kung 3 poäng, en dam 2 poäng och en knekt 1 poäng. Alla andra kort tilldelas noll poäng.
   (a) Hur många bridgehänder ger en totalpoäng som är exakt 3? (3p)
   (b) Hur många bridgehänder ger en totalpoäng som är större än eller lika med 3? (3p)

2. Låt $0 < \epsilon < 1$ och låt X, Y, B vara tre oberoende slumpvariabler med följande fördelningar: X är exponentialfördelad med parameter 1, Y är exponentialfördelad med parameter $1-\epsilon$ och B är Bernoulli-fördelad med parameter ϵ (dvs $\mathbb{P}(B=1)=\epsilon$ medans $\mathbb{P}(B=0)=1-\epsilon$).
   (a) Beräkna den momentgenererande funktionen för X (OBS: Tydlig redovisning krävs då man kan antas ha svaret på sin formelsamling). (2p)
   (b) Beräkna den momentgenererande funktionen för BY. (2p)
   (c) Vilken fördelning har slumpvariabeln Z om $Z = X + BY$? (2p)

3. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende normalfördelade slumpvariabler sådana att $X_n \sim$N$(n\mu, \sigma^2)$. Låt nu

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, \quad Z = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{6} \text{ och } W = \frac{X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3}{3}$$

   (a) Vilka av Y, Z och W är väntevärdesriktiga skattare av μ? (2p)
   (b) Vilken/vilka av de väntevärdesriktiga skattarna är effektivast? (2p)

(c) Låt

$$W_n = \frac{X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n}{n}.$$

Är W_n en konsistent skattare? (2p)

4. Företaget Georgios solceller tillverkar solceller. Georgios vill testa hur stor effekt hans solceller producerar som funktion av ljusstyrkan. Han samlar därför ihop data och sammanställer i följande tabell.

Ljusstyrka (Lumen)	100	150	200	250	300	350	400	450
Effekt (W)	0.9	2.3	4.3	5.6	5.7	7.8	8.9	10.9

Georgios ansätter en linjär regressionsmodell $y = \beta_0 + \beta_1 x$ där y är effekten och x är ljusstyrkan. Data sammanfattas med att $S_{xx} = 105000$, $S_{yy} \approx 78.18$ och $S_{xy} = 2840$.

Hjälp Georgios med att lösa följande uppgifter:

(a) Skatta β_0 och β_1. (2p)

(b) Skapa ett 95% konfidensintervall för β_1 och testa huruvida $\beta_1 = 0$ på 95%-nivån. (2p)

(c) Ange förklaringsgraden och beräkna residualerna. Kommentera ditt resultat. (2p)

(d) Vilken effekt bör man förvänta sig om lusstyrkan uppgår till 500 lumen? Vad händer vid 20 lumen? Kommentera dina resultat. (1p)

5. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara i.i.d. (dvs oberoende och likafördelade) med fördelning

$$f(x) = \frac{2m^2}{x^3} \text{ för } x \geq m,$$

där $m > 0$ är en parameter vars värde är okänt. Betrakta hypoteserna

$$H_0 : m = 2 \text{ och } H_1 : m \neq 2.$$

(a) Bestäm den generaliserade likelihood-ration och motsvarande förkastningsregion. (3p)

(b) Bestäm enklast möjliga test utifrån ditt svar i (a). Bestäm dessutom en lämplig förkastningsregion för ditt test om signifikansnivån skall vara 1% och $n = 10$. (3p)

6. Låt (X, Y) vara två slumpvariabler där X är Poissonfördelad med parameter λ där $0 < \lambda < 1$, och givet att $X = k$ så är Y Binomialfördelad med parametrar k och λ.

(a) Bestäm den gemensamma sannolikhetsfunktionen för (X, Y) och marginalsannolikhetsfunktionen för Y. (3p)

(b) Beräkna $\mathbb{E}[Y]$. (2p)

(c) Beräkna $\mathbb{E}[Y^2]$ (2p)

7. Företaget Rörtillverkarna tillverkar rör. För att rören inte skall läcka är det viktigt att måtten är exakta. I tillverkningsprocessen finns det dock små osäkerheter vilket gör att rörens dimensioner inte blir precis så som man vill ha dem.

   Rörtillverkarna skall testa sin nya rörtillverkningsmaskin och mäter därför skillnaden mellan den faktiska diametern på rören och den föreskrivna diametern. De gör det på 10 rör och får följande tabell över avvikelserna (i μm).

rör nr:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
avvikelse:	96	-19	-8	18	16	47	41	55	-21	74

   Vi kan anta att avvikelserna är oberoende och normalfördelade med parametrar μ, σ^2.

   (a) Hitta ett 95% K.I. för μ. (2p)

   (b) Använd ditt svar i (a) för att testa huruvida det verkar finnas några systematiska tillverkningsfel av rörens diameter. (2p)

   (c) Vilket p-värde har ditt test i (b)? (2p)

8. Jöns-Harald har ställts inför några olika experimentella situationer som lämpligen modelleras som slumpmässiga skeenden. Jöns-Harald behöver hjälp med att identifiera lämplig slumpmässig modell. I varje deluppgift nedan skall ni ange en relevant slumpvariabel med specificerad fördelning. Ni skall även motivera kort men kärnfullt ert val av slumpvariabel/fördelning. Vilka antaganden gör ni? (OBS: Ni behöver inte härleda sannolikhetsfunktionerna/täthetsfunktionerna, bara motivera era val. Uppgiften går ut på att känna igen situationer.)

   (a) Jöns-Harald kastar pil på en tavla 100 gånger. Tavlan har fält numrerade mellan 1 och 20 och Jöns-Harald låter X_1 vara det slumpmässiga antalet gånger som han träffar området markerat 18. Vilken fördelning har X_1? (1p)

   (b) Återigen kastar Jöns-Harald pil, men nu låter ha X_2 vara det totala antalet kast som behövs till och med att han träffar fältet markerat 18 för första gången. Vilken fördelning har X_2? (1p)

   (c) Denna gång räknar Jöns-Harald det totala antalet kast som behövs till och med att han träffat fältet markerat 18 sammanlagt 5 gånger. Om X_3 är detta antalet, vilken fördelning har då X_3? (1p)

   (d) Jöns-Harald räknar antalet sönderfall N från ett radioaktivt prov som sker under en timme. Ange en lämplig fördelning för N. (1p)

(e) Jöns-Harald väntar på att en radioaktiv atomkärna skall sönderfalla. Hur skall han modellera väntetiden T? (1p)

(f) Jöns-Harald försöker mäta reaktionstiden hos ett elektriskt relä. Mätningen av reaktionstiden är behäftat med mätfel. Hur skall Jöns-Harald modellera detta mätfel M_{fel}? (1p)