Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik TMA321**

Tid: den 3 juni, 2019
Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, egenhändigt skriven formelsamling om två A4 fram och bak (dvs 4 sidor), samt utdelade tabeller.

Tentamen består av 8 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:
betyg “3”: 20 till 29 poäng
betyg “4”: 30 till 39 poäng
betyg “5”: 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad.

1. Låt X, Y, Z vara oberoende $Exp(\lambda)$-fördelade slumpvariabler. Låt K_1 vara en rektangel med sidlängderna X och Y, och låt K_2 vara en kvadrat med sidlängd Z.

   (a) Beräkna sannolikheten att omkretsen av K_2 är större än omkretsen av K_1. (2p)

   (b) Beräkna sannolikheten att omkretsen av K_1 överstiger λ. Beräkna även sannolikheten att omkretsen av K_2 överstiger λ. (2p)

   (c) Låt K_3 vara en rektangel med sidlängder X och $1/Y$. Beräkna täthetsfunktionen för arean av K_3. (2p)

   Lösning:

   (a) Vi söker $\mathbb{P}(2Z \geq X + Y)$ och denna kan beräknas med hjälp av den gemensamma täthetsfunktionen $f_{X,Y,Z}(x, y, z) = f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$.

Vi får då att

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(2Z \geq X+Y) \\
&\quad = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^3 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} e^{-\lambda z} I(2z \geq x+y) dxdydz \\
&\quad = \lambda^3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} \int_{(x+y)/2}^\infty e^{-\lambda z} dzdydx \\
&\quad = \lambda^3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} \left[\frac{e^{-\lambda z}}{-\lambda}\right]_{(x+y)/2}^\infty dydx \\
&\quad = \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} e^{-\lambda(x+y)/2} dydx \\
&\quad = \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-3\lambda x/2} e^{-3\lambda y/2} dxdy \\
&\quad = \lambda^2 \int_0^\infty e^{-3\lambda y/2} dy \left[\frac{2e^{-3\lambda x/2}}{-3\lambda}\right]_0^\infty = \frac{4}{9}.
\end{aligned}
$$

(b) Vi söker

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(2X+2Y \geq \lambda) = \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty I(x+y \geq \lambda/2) e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy \\
&\quad = \lambda^2 \int_0^\infty \int_{\max(0,\lambda/2-y)}^\infty e^{-\lambda x} dx e^{-\lambda y} dy \\
&\quad = \lambda^2 \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_{\max(0,\lambda/2-y)}^\infty e^{-\lambda y} dy \\
&\quad = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda(\max(0,\lambda/2-y))-\lambda y} dy = \lambda \int_0^{\lambda/2} e^{-\lambda^2/2} dy + \lambda \int_{\lambda/2}^\infty e^{-\lambda y} dy \\
&\quad = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda^2/2} + \lambda \left[\frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda}\right]_{\lambda/2}^\infty = e^{-\lambda^2/2}\left(\frac{\lambda^2}{2}+1\right).
\end{aligned}
$$

För K_2 har vi att

$$
\mathbb{P}(4Z \geq \lambda) = \lambda \int_0^\infty I(z \geq \lambda/4) e^{-\lambda z} dz = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda z}}{-\lambda}\right]_{\lambda/4}^\infty = e^{-\lambda^2/4}.
$$

(c) Låt $A = X/Y$ beteckna arean. Vi har att

$$
\begin{aligned}
&F_A(s) = \mathbb{P}(A \leq s) = \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty I(x/y \leq s) e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy \\
&\quad = \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^{ys} e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy = \lambda^2 \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{ys} e^{-\lambda y} dy \\
&\quad = \lambda \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda ys}\right) e^{-\lambda y} dy = 1 - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda y(1+s)} dy \\
&\quad = 1 + \left[\frac{e^{-\lambda y(1+s)}}{1+s}\right]_0^\infty = 1 - \frac{1}{1+s} = \frac{s}{1+s},
\end{aligned}
$$

för $0 \leq s < \infty$. Vi ser därför att

$$f_A(s) = F'_A(s) = \frac{1}{(1+s)^2} \text{ för } 0 \leq s < \infty.$$

Detta är för övrigt en Cauchy-fördelning.

2. I en population har 0.1% av alla genen g1 och 0.5% har genen g2. Båda dessa gener ökar risken för en specifik cancerform som vi här kallar JT's sjukdom. Sannolikheten att en person

   (i) Utan g1,g2 utvecklar JT's sjukdom är 1%.

   (ii) Med g1 men utan g2 utvecklar JT's sjukdom är 9%.

   (iii) Med g2 men utan g1 utvecklar JT's sjukdom är 4%.

   (iv) Med g1 och g2 utvecklar JT's sjukdom är 19%.

   Vi antar att individer i populationen bär på generna oberoende av varandra. Vi väljer ut en individ slumpmässigt (dvs likformigt i populationen).

   (a) Vad är sannolikheten att denna individ kommer utveckla JT's sjukdom? (2p)

   (b) Givet att individen utvecklade JT's sjukdom, vad är sannolikheten att hen bär på gen g1? (2p)

   (c) Hur stor andel av alla som utvecklar JT's sjukdom bär på både genen g1 och genen g2? (2p)

   Lösning:

   (a) Vi får dela upp i olika fall. Låt $G_1 = \{\text{vald individ bär på g1}\}$, $G_2 = \{\text{vald individ bär på g2}\}$ och $C = \{\text{vald individ utvecklar JT's sjukdom}\}$. Vi söker då

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(C|G_1^c \cap G_2^c)\mathbb{P}(G_1^c \cap G_2^c) + \mathbb{P}(C|G_1 \cap G_2^c)\mathbb{P}(G_1 \cap G_2^c) \\ &\quad + \mathbb{P}(C|G_1^c \cap G_2)\mathbb{P}(G_1^c \cap G_2) + \mathbb{P}(C|G_1 \cap G_2)\mathbb{P}(G_1 \cap G_2) \\ &= 0.01 * 0.999 * 0.995 + 0.09 * 0.001 * 0.995 + 0.04 * 0.999 * 0.005 \\ &\quad + 0.19 * 0.001 * 0.005 \approx 0.0102.\end{aligned}$$

   (b) Vi söker här

$$\mathbb{P}(G_1|C) = \frac{\mathbb{P}(C \cap G_1)}{\mathbb{P}(C)},$$

   och vi har att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \cap G_1) &= \mathbb{P}(C \cap G_1 \cap G_2) + \mathbb{P}(C \cap G_1 \cap G_2^c) \\ &= 0.19 * 0.001 * 0.005 + 0.09 * 0.001 * 0.995 \approx 0.00009,\end{aligned}$$

   så att

$$\mathbb{P}(G_1|C) \approx \frac{0.00009}{0.01} \approx 0.0009,$$

   dvs 0.9%.

(c)

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2|C) = \frac{\mathbb{P}(C \cap G_1 \cap G_2)}{\mathbb{P}(C)} \approx \frac{0.19 * 0.001 * 0.005}{0.01} \approx 0.000095.$$

3. Låt $Z \sim N(0,1)$, dvs Z har en standardiserad normalfördelning.

   (a) Beräkna den momentgenererande funktionen för Z^2. (2p)

   (b) Låt $Z_1, \ldots, Z_n$ vara i.i.d. (dvs oberoende och likafördelade) $N(0,1)$. Beräkna den momentgenererande funktionen för $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$. (2p)

   (c) Låt N vara likformigt fördelad på mängden $0, 1, \ldots, n-1$ och låt

   $$Y := Z_1^2 + \ldots + Z_N^2.$$

   Bestäm den momentgenererande funktionen för Y. (2p)

   Lösning:

   (a) Vi har att

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{Z^2 t}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z^2 t} e^{-z^2/2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2(1-2t)/2} dz \\ &= \{y = \sqrt{1-2t}z\} = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{1-2t}},\end{aligned}$$

   för $t < 1/2$.

   (b) Vi har att

   $$\mathbb{E}\left[e^{(Z_1^2+\cdots+Z_n^2)t}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{Z_k^2 t}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}}\right)^n = (1-2t)^{-n/2},$$

   återigen för $t < 1/2$.

   (c) Vi har att

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{Yt}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{(Z_1^2+\cdots+Z_N^2)t}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{(Z_1^2+\cdots+Z_N^2)t}\middle| N\right]\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[e^{(Z_1^2+\cdots+Z_N^2)t}\middle| N=k\right] \mathbb{P}(N=k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[e^{(Z_1^2+\cdots+Z_k^2)t}\right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1-2t)^{-k/2} = \frac{1}{n} \frac{(1-2t)^{-n/2} - 1}{(1-2t)^{-1/2} - 1}.\end{aligned}$$

4. Låt X vara en slumpvariabel med sannolikhetsfunktion

   $$\mathbb{P}(X = k) = (1 - e^{-\alpha}) e^{-\alpha(k-1)} \text{ för } k = 1, 2, \ldots,$$

   där $\alpha > 0$.

(a) Hitta momentskattaren (MME:n) för α. (3p)

(b) Hitta maximum likelihoodskattaren (MLE:n) för α. (3p)

(c) Antag att vi har fått följande dataserie av utfall från slumpvariabeln X :

6 13 16 9 21 17 10

Vad blir det numeriska värdet på skattarna ovan? (1p)

Lösning:

(a) Vi börjar med att notera att fördelningen helt enkelt är en geometrisk fördelning med parameter $p = e^{-\alpha}$. Därför har vi att

$$\frac{1}{1-e^{-\alpha}} = \mathbb{E}[X].$$

Momentmetoden säger oss att

$$\frac{1}{1-e^{-\hat{\alpha}}} = \bar{X}, \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\hat{\alpha}} = 1 - \frac{1}{\bar{X}}$$

så att $\hat{\alpha} = -\log\left(1 - \frac{1}{\bar{X}}\right)$.

(b) För MLE:n har vi att likelihooden blir

$$\begin{aligned} lik(\alpha) = f(X_1, \ldots, X_n|\alpha) &= \prod_{k=1}^{n} f(X_k|\alpha) \\ &= \prod_{k=1}^{n} (1-e^{-\alpha})e^{-\alpha(X_k-1)} = (e^{\alpha}-1)^n \, e^{-\alpha \sum_{k=1}^{n} X_k}, \end{aligned}$$

så att log-likelihooden blir

$$l(\alpha) = n\log\left(e^{\alpha}-1\right) - \alpha \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Vi deriverar denna funktion och får

$$l'(\alpha) = n\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1} - \sum_{k=1}^{n} X_k = n\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \sum_{k=1}^{n} X_k = 0$$

och vi ser att detta återigen uppfylls av

$$\hat{\alpha} = -\log\left(1 - \frac{1}{\bar{X}}\right).$$

Dessutom är

$$l''(\alpha) = -n\frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} < 0$$

så att detta är ett maximum.

(c) Vi får att $\bar{x} \approx 13.1429$ så att

$$\hat{\alpha}(x) = -\log\left(1 - \frac{1}{\bar{x}}\right) \approx 0.0791.$$

5. Lisa-Bert mäter halten av dioxiner i nio markprover. Lisa-Bert antar att data kommer från en normalfördelning med okända μ och σ^2. Hennes dataserie blev som följer:

prov nr:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
halt:	11.1	11.5	10.1	8.5	9.3	8.9	12.4	9.4	10.7

(a) Hitta ett 95% konfidensintervall för μ. (3p)

(b) Hitta ett 99% konfidensintervall för σ^2. (3p)

Lösning:

(a) Vi börjar med att punktskatta μ och σ^2 och ser att

$$\hat{\mu} = \bar{x} \approx 10.2$$

och

$$s^2 = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2 \approx 1.704.$$

Vidare har vi att referensvariabeln

$$R = \frac{\bar{X} - \mu}{s(X)/\sqrt{9}} \sim t(8)$$

Enligt tabell har vi att $t_{0.025}(8) \approx 2.306$ så att

$$\begin{aligned} 0.05 &= \mathbb{P}(-2.306 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{s(X)/\sqrt{9}} \leq 2.306) \\ &= \mathbb{P}\left(\bar{X} - 2.306\frac{s(X)}{3} \leq \mu \leq \bar{X} + 2.306\frac{s(X)}{3}\right), \end{aligned}$$

så att ett 95% numeriskt konfidensintervall blir

$$I_\mu = \bar{x} \pm 2.306\frac{s(x)}{3} \approx 10.2 \pm \frac{\sqrt{1.704}}{3} \approx [9.2, 11.2].$$

(b) Här använder vi referensvariabeln

$$R = \frac{(n-1)s^2(X)}{\sigma^2} \sim \chi^2(8).$$

För χ^2-fördelningen har vi kvantilerna $\chi^2_{0.005}(8) \approx 21.96$ och $\chi^2_{0.995}(8) \approx 1.34$. Vi får att

$$0.01 = \mathbb{P}(1.34 \leq \frac{8s^2(X)}{\sigma^2} \leq 21.96) = \mathbb{P}\left(\frac{8s^2(X)}{21.96} \leq \sigma^2 \leq \frac{8s^2(X)}{1.34}\right)$$

Ett numeriskt konfidensintervall blir därför

$$I_{\sigma^2} = \left[\frac{8s^2(x)}{21.96}, \frac{8s^2(x)}{1.34}\right] \approx \left[\frac{8 * 1.704}{21.96}, \frac{8 * 1.704}{1.34}\right] \approx [0.62, 10.2].$$

6. Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara i.i.d. $U[0, \theta]$ och låt $\hat{\theta} = \max(X_1, \ldots, X_n)$ vara en skattare för θ.

   (a) Bestäm täthetsfunktionen för slumpvariabeln $\hat{\theta}$. (2p)

   (b) Beräkna väntevärdet av $\hat{\theta}$. Är skattaren väntevärdesriktig? (2p)

   (c) Är $\hat{\theta}$ en konsistent skattare? (3p)

   Lösning:

   (a) Vi börjar med att beräkna fördelningsfunktionen. Vi har att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\hat{\theta} \leq x) &= \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n,\end{aligned}$$

   så att

$$f_{\hat{\theta}}(x) = n\theta^{-n}x^{n-1} \text{ för } 0 \leq x \leq \theta.$$

   (b) Vi har att

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \int_0^\theta xn\theta^{-n}x^{n-1}dx = n\theta^{-n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta = \theta\frac{n}{n+1}.$$

   och vi ser att $\hat{\theta}$ inte är väntevärdesriktig.

   (c) Konsistens innebär att för varje $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon)$. För att visa konsistens kan man använda t.ex. Chebyshev's olikhet, eller så räknar man bara på. Vi har nämligen att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \epsilon) &= \mathbb{P}(-\epsilon \leq \hat{\theta}_n - \theta \leq \epsilon) \\ &= \mathbb{P}(\theta - \epsilon \leq \hat{\theta}_n \leq \theta + \epsilon) = \mathbb{P}(\theta - \epsilon \leq \hat{\theta}_n \leq \theta) \\ &= \int_{\theta-\epsilon}^{\theta} n\theta^{-n}x^{n-1}dx = \frac{\theta^n - (\theta-\epsilon)^n}{\theta^n},\end{aligned}$$

   där vi använder att $\hat{\theta}_n$ måste vara mindre än θ. Vi har därför att

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) = 1 - \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \epsilon) = \left(1 - \frac{\epsilon}{\theta}\right)^n \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

7. I Solna vill Gubb-Jan undersöka hur råttor absorberar substansen Q från födan de intar. Gubb-Jan gör därför en serie av kontrollerade experiment där råttorna får olika doser av substansen Q, och sedan tas biopsier på

råttorna för att se hur mycket av ämnet som har tagits upp. Gubb-Jan fick följande mätserie:

Dos i maten:	30	40	50	60	70	80	90	100
Upptagen mängd:	4.87	6.09	6.38	5.89	6.99	6.37	8.48	6.85

Data kunde sammanfattas med $S_{xx} = 4200$, $S_{yy} = 7.51$ och $S_{xy} = 134.4$.

Gubb-Jan ansätter en linjär regressionsmodell $y = \beta_0 + \beta_1 x$ där x är dosen i maten och y upptagen mängd. Hjälp Gubb-Jan med följande uppgifter:

(a) Skatta β_0, β_1. (2p)

(b) Skapa ett 95% konfidensintervall för β_1 och testa huruvida $\beta_1 = 0$ på 95%-nivån. (2p)

(c) Ange förklaringsgraden och beräkna residualerna. Verkar Gubb-Jans modell rimlig? (2p)

Lösning

(a) Vi har att

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \approx 0.032 \text{ och } \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \approx 4.41$$

(b) Vi använder att

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_r/\sqrt{S_{xx}}} \sim t(6)$$

och får med hjälp av tabell att $t_{0.025}(6) \approx 2.447$ så att

$$\begin{aligned} 0.95 &= \mathbb{P}\left(-2.447 \leq \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_r/\sqrt{S_{xx}}} \leq 2.447\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\hat{\beta}_1 - 2.447\frac{s_r}{\sqrt{S_{xx}}} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + 2.447\frac{s_r}{\sqrt{S_{xx}}}\right). \end{aligned}$$

Vi har att

$$s_r^2 = \frac{1}{n-2}\left(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right) \approx 0.535$$

så att $s_r = 0.731$. Ett 95% numeriskt K.I. för β_1 blir då

$$I_{\beta_1} = \hat{\beta}_1 \pm 2.447\frac{s_r}{\sqrt{S_{xx}}} \approx [0.0044, 0.0596].$$

Då $0 \notin I_{\beta_1}$ förkastar vi H_0 på 95% nivån.

(c) Förklaringsgraden blir

$$R^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}S_{yy}} \approx 0.5726$$

vilket inte är speciellt bra. Residualerna ($e_k = y_k - (\beta_0 + \beta_1 x_k)$) blir

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
-0.50	0.40	0.37	-0.44	0.34	-0.60	1.19	$-0.76.$

Det är svårt att se något mönster, och man kan kanske därför inte föreslå en bättre modell. Åtgärden borde vara att göra fler experiment för att få bättre säkerhet.

8. Arne är ansvarig för inköp av brädor till ett större bygge. Han vet att brädorna generellt sätt håller hög kvalité, men då bygget är stort misstänker Arne att en del brädor ändå är defekta.

   Antag att sannolikheten att en bräda är defekt är 0.0001, och antag att bygget köper in 2 000 000 brädor totalt.

   Låt X vara antalet brädor (av de 2 000 000 som köptes in) som är defekta.

   (a) Vilken fördelning har X? Motivera noggrannt. (2p)

   (b) En del av bygget använder 20 000 av brädorna. Vad är sannolikheten att tre eller fler av dessa är defekta brädor? (2p)

   (c) Vad är sannolikheten att det totala antalet defekta brädor av de 2 000 000 som köps in överstiger 220? (2p)

   Lösning:

   (a) Vi antar att brädorna är defekta oberoende av varandra. Under detta antagande är X binomialfördelad med parametrar $n = 2000000$ och $p = 0.0001$. Antagandet kan möjligtvis kritiseras då flera brädor antagligen kommer från samma träd. Detta bör dock inte påverka alldeles för mycket, så binomialfördelningen är ett bra val.

   (b) Låt Y vara antalet defekta av de 20 000. Här är $Y \sim$Bin$(20000, 0.0001)$, men det är så klart bäst att använda Poisson-approximation. I detta fall får vi att $Y \approx$Poi(2) så att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2)\\ &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2)\\ &\approx 1 - e^{-2}\left(1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2}\right) = 1 - 5e^{-2} \approx 0.3233.\end{aligned}$$

   (c) Här är Y approximativt normalfördelad, d.v.s. $Y \approx N(\mathbb{E}[Y], \mathrm{Var}(Y))$ och här är $\mathbb{E}[Y] = 2000000 * 0.001 = 200$ medans $\mathrm{Var}(Y) = 2000000 *$

$0.0001 * (1 - 0.0001) \approx 200$. Vi ser alltså att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geq 220) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y - 200}{\sqrt{200}} \geq \frac{220 - 200}{\sqrt{200}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}(Z \geq 1.41) \approx 1 - 0.92 = 0.08.\end{aligned}$$