

Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik TMA321**

Tid: den 29 maj, 2017

Examinator och jour: Erik Broman, mob. 073 7320791,

Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, egenhändigt skriven formelsamling om två A4 fram och bak (dvs 4 sidor), samt utdelade tabeller.

Tentamen består av 8 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

betyg "3": 20 till 29 poäng

betyg "4": 30 till 39 poäng

betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad.

1. Låt  $X$  vara en slumpvariabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} c_1 x^2 & \text{om } 0 \leq x < 1, \\ c_2 \sqrt{x} & \text{om } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- (a) Bestäm konstanterna  $c_1, c_2$  så att medianen för  $X$  blir 1. (2p)
- (b) Beräkna väntevärdet av  $X$ . (2p)
- (c) Hitta fördelningsfunktionen  $F_X(x)$  för slumpvariabeln  $X$ . (3p)

2. Låt  $X \sim U\{1, \dots, n\}$  och givet att  $X = k$ , låt  $Y \sim \text{Poi}(k)$ .

- (a) Hitta den gemensamma slf för  $(X, Y)$  och beräkna  $\mathbb{E}[e^{X-Y}]$ . (3p)
- (b) Beräkna  $\mathbb{E}[Y]$ . (2p)

3. Per och Lina har en kvadrat hemma hos sig. De vill skatta arean och mäter därför upp sidan på kvadraten två gånger. Dessa mätningar representeras av två oberoende slumpvariabler  $S_1, S_2 \sim N(L, \sigma^2)$  där  $L$  är kvadratens sanna sidolängd.

Per tycker att de skall skatta arean genom att ta medelvärdet av skattningarna för sidolängden och kvadrera, medans Lina tycker att det verkar bättre att helt sonika multiplicera de två skattade värdena.

- (a) Ange formlerna för Pers respektive Linas skattningar av arean, och undersök väntevärdesriktigheten hos dessa. (3p)
- (b) För den eller de skattningar i uppgift (a) som är väntevärdesriktiga, beräkna MSE (i termer av  $\sigma^2$  och  $L$ ), dvs den förväntade kvadratiske avvikelser från det sanna värdet på arean. (3p)

4. Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara i.i.d. med tfkn

$$f(x) = (\alpha/2 - 1)x^{-\alpha/2} \text{ för } x \geq 1, \text{ där } \alpha > 2.$$

- (a) Hitta MME (momentskattaren) för  $\alpha$ . Vad händer om  $\alpha \leq 2$ ? (3p)  
 (b) Hitta MLE (maximum likelihood skattaren) för  $\alpha$ . (3p)
5. (a) Visa att den momentgenererande funktionen för slumpvariabeln  $Z \sim N(0, 1)$  är  $e^{t^2/2}$ . (2p)  
 (b) Använd (a) för att hitta den momentgenererande funktionen för  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . (2p)  
 (c) Härled den momentgenererande funktionen för  $Z_1 + \dots + Z_n$  om  $Z_1, \dots, Z_n$  är i.i.d.  $N(0, 1)$ . (1p)  
 (d) Låt  $N \sim \text{Poi}(\lambda)$  för något  $\lambda$ , och låt sedan

$$Y = \sum_{k=1}^N Z_k,$$

där  $Z_1, Z_2, \dots$  är i.i.d.  $N(0, 1)$ . Bestäm den momengenererande funktionen för  $Y$ . Jämför ditt svar med det i (c) och diskutera kort. (3p)

6. Ämnet polonium är mycket giftigt men dödar relativt långsamt. FSB vill använda det för att ha ihjäl regimkritiker som bor utomlands. De är intresserade av att hitta lämplig dos för att deras agenter skall hinna åka hem väl i tid innan offret avlider. FSB gjorde en förstudie på 9 råttor och fick följande resultat:

dos ( $\mu\text{g}$ ):	10	11	12	13	14	15	16	17	18
överlevnadstid (h):	188	189	180	181	177	183	176	175	168

Data kunde sammanfattas med  $S_{xx} = 60$ ,  $S_{yy} = 348$  och  $S_{xy} = -128$ .

Forskarna vid FSB ansatta en linjär regressionsmodell  $y = \beta_0 + \beta_1 x$  där  $x$  är dosen och  $y$  överlevnadstiden i timmar. Hjälp dem med följande uppgifter:

- (a) Skatta  $\beta_0, \beta_1$ . (2p)  
 (b) Skapa ett 99% konfidensintervall för  $\beta_1$  och testa huruvida  $\beta_1 = -2$  på 99%-nivån. (2p)  
 (c) Ange förklaringsgraden och beräkna residualerna. Verkar deras modell rimlig? (2p)
7. Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara i.i.d. geometriskt fördelade slumpvariabler. Betrakta hypoteserna

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \text{ och } H_1 : p = \frac{3}{4}.$$

- (a) Sätt upp likelihood ration och härled ur denna enklaste möjliga test med tillhörande förkastningsområde. (3p)
  - (b) Om  $n = 12$ , bestäm förkastningsområde (RR) motsvarande signifikansnivå 1% för ditt härledda test. (3p)
  - (c) Vilken styrka får du för ditt test i (b)? (2p)
8. Trettio elever skall delas in i tre klasser, klass A,B och C, med tio elever i varje. Urvalet till klasserna är slumpmässigt.
- (a) De tre vännerna Jenny, Penny och Lenny vill gärna hamna i samma klass. Vad är sannolikheten att exakt två av kompisarna hamnar i samma klass? (2p)
  - (b) Ingen av de tre vännerna gilla Kenny. På hur många sätt kan klasserna delas upp så att ingen av de tre hamnar med Kenny? (2p)