Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik TMA321**

Tid: 7 oktober, 2017
Examinatorer: Erik Broman.
Jour: Sandra Eriksson Barman.
Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, egenhändigt skriven formelsamling om två A4 fram och bak (dvs 4 sidor), samt utdelade tabeller.

Tentamen består av 8 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:
betyg "3": 20 till 29
betyg "4": 30 till 39 poäng
betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad

1. På ett barnkalas finns tre lådor med godis. Låda nummer 1 innehåller 6 goda och 3 äckliga godisbitar, låda nummer 2 innehåller 7 goda och 2 äckliga medan låda nummer 3 innehåller 8 goda och 1 äcklig.
   Kalle är först i kön för att plocka godis. Han väljer först en låda slumpmässigt och därefter plockar han två slumpmässigt valda godisar ur den valda lådan.

   (a) Beräkna sannolikheten att Kalle får minst en äcklig godisbit. (3p)

   (b) Givet händelsen i (a), beräkna sannolikheten att Kalle får två äckliga godisbitar. (3p)

   (c) Om Kalle fick två äckliga godisbitar, vad är då sannolikheten att de kom från låda nummer 1? (2p)

2. En kontinuerlig slumpvariabel har följande täthetsfunktion:

$$f_X(x) = c\cos(x) \quad \text{för } x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

   (a) Bestäm c så att detta blir en täthetsfunktion. (2p)

   (b) Beräkna fördelningsfunktionen $F_X(x)$. (2p)

   (c) Låt $Y = X^2$, hitta täthetsfunktionen för Y. (3p)

3. En liten solfångare kan ges två olika konfigurationer, A och B. För att utreda vilken som är effektivast inhandlades två identiska exemplar som ställdes på olika konfiguartioner.

   Därefter mättes energiutbytet (i kWh) under 11 försöksdagar och detta blev som följer:

Dag nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Konfig. A	9.4	7.7	13.6	15.7	12	8.3	13.2	9.2	9.9	10.3	8.1
Konfig. B	9.9	9.5	11.3	16.6	12.3	7	12.8	9.5	13.5	13.1	6.8

B:

Man kan anta att mätvärdena dras ur normalfördelningar.

(a) Bestäm ett 95% konfidensintervall för skillnaden i energiutbyte mellan konfiguration A och B. Redovisa noga alla eventuella antaganden som du gör. (4p)

(b) Testa hypotesen att det inte är någon skillnad mellan konfigurationerna med 5% felrisk. Gör ditt bästa för att hitta en ungefärligt p-värde för ditt test. Vilken felrisk skulle du behöva acceptera för att förkasta ditt H_0? (3p)

4. Låt $X \sim \text{Geom}(p)$ (dvs geometrisk fördelning) och $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ (dvs exponentialfördelning).

(a) Beräkna de momentgenererande funktionerna för X och T. (3p)

(b) Låt $X_n \sim \text{Geom}(\lambda/n)$ och betrakta $T_n = X_n/n$. Visa med hjälp av momentgenererande funktioner att $T_n \xrightarrow{d} T$ (dvs att T_n konvergerar mot T i fördelning). (3p)

5. I en storstad har man satt upp en mätstation för ozonhalten vid marknivån (Y). Man intresserar sig bl.a. för hur halten i fråga beror av lufttemperaturen (x). De första åtta mätdagarna låg i en period med likartade vindförhållanden men med stigande temperatur. Följande mätvärden (tagna kl. 17.00) erhölls:

Dag	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatur (°C)	9.3	10.2	12.6	15.5	13.3	16.6	19.7	22.7
Ozonhalt (mg/m^3)	31	34	41	50	46	52	64	73

Förutsätt nu att ozonhalterna beror linjärt av temperaturen, och att de uppmätts med oberoende slumpmässiga mätfel enligt modellen

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, 8$$

där $\epsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$.

(a) Skatta parametrarna α och β. (2p)

(b) Beräkna ett 95% konfidensintervall för β. (2p)

(c) Vilken ozonhalt bör vi förvänta oss vid temperaturen 20°C? (2p)

6. Låt (X, Y) ha gemensam täthetsfunktion

$$f(x, y) = cxye^{xy^2} \text{ för } 0 \leq x \leq 1, \text{ och } x \leq y \leq 1,$$

där c är en konstant.

(a) Hitta marginalfördelningarna för X och Y. (3p)

(b) Hitta de betingade fördelningarna för X givet Y respektive för Y givet X. (2p)

(c) Bestäm $\mathbb{E}[X|Y]$. (3p)

7. Låt X vara en diskret slumpvariabel med sannolikhetsfunktion

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{N} \text{ för } k = 2, 4, \ldots, 2N$$

där N är en heltalsvärd parameter som vi vill skatta.

(a) Hitta momentskattaren (MME) för X. (2p)

(b) Hitta maximum likelihood skattaren (MLE) för X. (2p)

(c) Antag att vi har en oberoende mätserie bestående av 6 slumptal dragna ur fördelningen ovan som ser ut som följer:

Tal nr	1	2	3	4	5	6
Resultat	4	8	2	24	10	14

Vad blir nu de numeriska värdena på era skattare? Diskutera och analysera ditt resultat. (2p)

8. Beskriv kortfattat men kärnfullt idén bakom ett likelihood ratio test. (2p)