

Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik TMA321**

Tid: den 13 oktober, 2018

Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, egenhändigt skriven formelsamling om två A4 fram och bak (dvs 4 sidor), samt utdelade tabeller.

Tentamen består av 8 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

betyg "3": 20 till 29 poäng

betyg "4": 30 till 39 poäng

betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad.

1. Låt $U_1 \sim U(\{1, \dots, n\})$ dvs U_1 är likormigt fördelad på mängden $\{1, 2, \dots, n\}$. Betingat på att $U_1 = k$, låt sedan $U_2 \sim U(\{1, \dots, 2k\})$.

(a) Hitta den gemensamma sannolikhetsfunktionen för U_1, U_2 samt marginalsannolikhetsfunktionen för U_2 . (3p)

(b) Bestäm $\mathbb{E}[U_2|U_1]$ och $\mathbb{E}[U_2]$. (3p)

(c) Mer generellt låter vi fördelningen för U_m betingat på att $U_{m-1} = k$ vara $U_m \sim U(\{1, \dots, 2k\})$. Bestäm $\mathbb{E}[U_m]$ för alla värden på m . (2p)

2. Låt X_1, \dots, X_n vara i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$ där μ är känt. Carlita vill testa hypoteserna

$$\begin{aligned} H_0 : \sigma^2 &= \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 &= \sigma_1^2 \end{aligned}$$

(a) Bilda lämplig likelihood ratio, och härled ur denna enklaste möjliga test. (3p)

(b) Hitta en lämplig förkastningsregion (RR) om signifikansnivån skall vara 2.5% och $n = 17$. (3p)

3. Låt (X, Y) ha gemensam täthetsfunktion

$$f(x, y) = 2y \text{ för } 0 \leq x, y \leq 1,$$

och låt $W = XY$.

(a) Bestäm den momentgenererande funktionen för W . (2p)

(b) Använd ditt svar i (a) för att bestämma $\mathbb{E}[W^n]$ för varje värde på n . (3p)

4. En slumpvariabel har fördelningen

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^{3/2} x^2 e^{-ax^2/2} \text{ för } x \geq 0,$$

där $a > 0$ är okänd.

- (a) Hitta momentskattaren (MME) för a . (3p)
 (b) Hitta maximum likelihoodskattaren (MLE) för a . (3p)

5. Bengt-Arne undersöker cellförändringar i cellprov. För ett givet cellprov antar Bengt-Arne att antalet celler med förändringar är Poissonfördelat med parameter $\lambda > 0$ (som är okänt). Bengt-Arne undersöker ett antal cellprov och får följande dataserie

#cellprov:	13	30	34	17	16	8	3
#förändringar:	0	1	2	3	4	5	6.

Data skall tolkas som att Bengt-Arne fick 13 cellprov med 0 cellförändringar etc.

- (a) Hjälp Bengt-Arne med att skatta $\lambda > 0$. (2p)
 (b) Hitta ett tvåsidigt 95% K.I. för λ åt Bengt-Arne. (2p)
 (c) Hitta ett ensidigt 95% K.I. för λ åt Bengt-Arne som är på formen $[c, \infty)$. (2p)

6. Märta-Lisa funderar på att köpa ett hus i centrala Älmhultaryd. Hon gör en enkel marknadsundersökning där hon tittar på ett antal hus som tidigare varit ute för försäljning. För varje sålt hus noterar hon slutpris och antalet kvadratmeter. Märta-Lisa fick följande dataserie

m^2 :	83	98	107	119	143	164	179	210	245
Pris:	160	170	190	210	230	200	240	220	240

Här anges priset i $kSEK$ (dvs i tusental kronor). Märta-Lisa ansätter en linjär regressionsmodell $y = \beta_0 + \beta_1 x$ där y är priset och x är antalet kvadratmeter. Data sammanfattas med att $S_{xx} \approx 23714$, $S_{yy} \approx 6800$ och $S_{xy} \approx 10323$.

Hjälp Märta-Lisa med att lösa följande uppgifter:

- (a) Skatta β_0 och β_1 . (2p)
 (b) Skapa ett 95% konfidensintervall för β_1 och testa huruvida $\beta_1 = 0$ på 95%-nivån. (2p)
 (c) Ange förklaringsgraden och beräkna residualerna. Kommentera ditt resultat. (2p)
 (d) Fundera kring Märta-Lisas val av modell och analysen ovan, är den rimlig? Vilka är bristerna? (1p)

7. En klubb består av 15 stalinister och 20 trotskyister. En arbetarkommitté skall bildas bestående av exakt 7 medlemmar.

(a) Vad är sannolikheten att kommittén innehåller minst en trotskyist men även fler stalinister än trotskyister, om varje medlem väljs oberoende och med samma sannolikhet? (2p)

(b) Stalinisterna vill genomföra en utrensning av oönskade element (dvs trotskyisterna). För att arbetarkommittén skall kunna besluta om en sådan måste de ha minst fem röster. Vad är sannolikheten att kommittén kan besluta om en laglig utrensning givet att kommittén är som i punkt a? Vi antar här att alla stalinister röstar för utrensning men alla trotskyister röstar emot. (2p)

(c) Efter en lyckad utrensning består nu klubben av enbart 15 stalinister. Snart splittras dessa upp i en revolutionär och en småborgerlig gren. På hur många sätt kan medlemmarna delas upp så att de båda grenarna innehåller minst 6 medlemmar? (2p)

8. Låt $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ och $a > 0$.

(a) Bestäm täthetsfunktionen för $Y = (T - a)^2$. (3p)

(b) Låt Z vara en slumpvariabel vars fördelningsfunktion $F_Z(t)$ definieras av att

$$F_Z(t) = \mathbb{P}((T - a)^2 \leq t | T \geq a)$$

för alla $t \in \mathbb{R}$. Hitta täthetsfunktionen för Z . (3p)