TMA321 | F1 | (1)

Kursen består av två delar

Sannolikhetsteori	Statistik
i) "regler" för slumpens beteende	i) dra slutsatser från data
ii) matematiska modeller för slumpmässiga fenomen	ii) testa hypoteser

---

Sannolikhetsteori:

Vår modell: ("tänk att vi genomför ett experiment")

i) Utfallsrummet $\Omega = \{$alla möjliga utfall av vårt experiment$\}$

ii) Ett element $\omega \in \Omega$ är ett specifikt utfall

iii) En händelse A är en samling utfall och utgör en delmängd av Ω ($A \subset \Omega$).

iv) En funktion $\mathbb{P}: A \subseteq \Omega \longrightarrow [0,1]$ som vi tolkar som sannolikheten (för A).

$\ulcorner \mathbb{P}(A) \in [0,1] \ \forall \ A \subseteq \Omega \lrcorner$

Ex: Tärningskast: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, händelse $A = \{1\}$, $B = \{1,2,3\}$

Funktionen $\mathbb{P}$ kallas för ett sannolikhetsmått och uppfyller alltid följande axiom:

1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \quad \forall \; A \subseteq \Omega$

2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

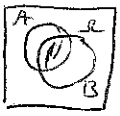
3) Om A, B är disjunkta $(A \cap B = \emptyset)$ så gäller $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Om $A_1, A_2, A_3, \ldots$ är disjunkta gäller

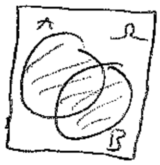
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Kom ihåg:

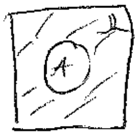
i) $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ och } \omega \in B\}$



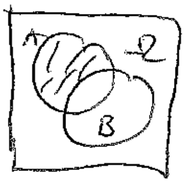
ii) $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ och/eller } \omega \in B\}$



iii) $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$

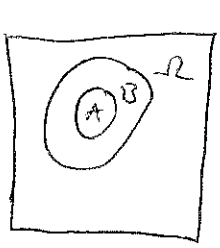


iv) $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \notin B\}$

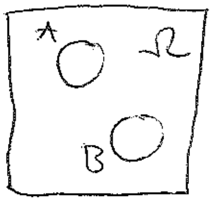


Vi skriver

v) $A \subset B$ om $\forall \, \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$



vi) $A \cap B = \emptyset \iff A, B$ är disjunkta



Sats (räkneregler för $\mathbb{P}$):

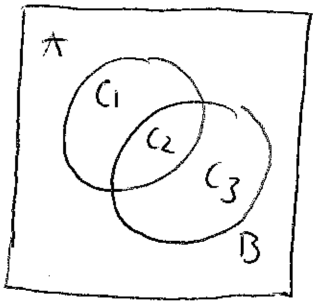
$\forall \; A, B \subset \Omega$ gäller

i) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

ii) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

iii) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

B: i)



$C_1 = A \setminus B$

$C_2 = A \cap B$

$C_3 = B \setminus A$

$A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

där C_1, C_2, C_3 är disjunkta

Vi får:

$$\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(C_1 \cup C_2 \cup C_3) + \mathbb{P}(C_2)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{axiom 3)}}}{=} \mathbb{P}(C_1 \cup C_2) + \mathbb{P}(C_3) + \mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(C_1 \cup C_2) + \mathbb{P}(C_3 \cup C_4)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

ii)

$$A \cup A^c = \Omega \Rightarrow \underset{\text{ax.2}}{1 = \mathbb{P}(\Omega)} \underset{\text{ax 1}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

iii)

Om $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A)$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \underset{\text{ax.3}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \underset{\text{ax.1}}{\geq} \mathbb{P}(A)$$

$\square$

<u>Divisionsregeln</u>: Om alla utfall i Ω är lika sannolika så gäller

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\text{ utfall i } A}{\#\text{ utfall i } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

<u>Tal:</u> 5 familjer har två barn:

P P P F F
F F F F F

a) Välj en familj slumpmässigt och låt

A = {den valda familjen har 2 flickor}

b) Välj en flicka slumpmässigt och låt

B = {den valda flickans familj har 2 flickor}

L: a)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{5}$$

b)

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{7}$$

//

Lite kombinatorik:

Ett experiment genomförs i k steg.

Låt $N_\ell = \#$ möjliga utfall i steg ℓ.

Vi får då att $|\Omega| = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot \ldots \cdot N_k$

Låt $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vara en mängd.

En permutation av $\mathcal{A}$ är ett ordnat arrangemang (dvs lista) av objekten $a_1, \ldots, a_n$.

Ex: $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ perm: (a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_3, a_1, a_2) osv

---

I) På hur många sätt kan vi permutera $\mathcal{A}$? $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

II) På hur många sätt kan vi välja k av objekten i $\mathcal{A}$ och lägga i ordning (dvs hur många listor av längd k kan vi skapa?)?

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

III) På hur många sätt kan vi välja k av objekten i $\mathcal{A}$ om vi ~~ej~~ tar hänsyn till ordning? (vi säger att vi kombinerar de k objekten)

listor är $\frac{n!}{(n-k)!}$. En specifik lista $\underbrace{(a_2, a_5, a_{17}, \ldots, a_6)}_{k \text{ objekt}}$ kan permuteras på $k!$ olika sätt. Alla dessa permutationer innehåller samma k objekt.

$$\Rightarrow \quad \#\,\text{kombinationer} = \frac{\#\,\text{listor}}{\#\,\text{perm.}} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \binom{n}{k}.$$

$\binom{n}{k}$ kallas för en binomialkoefficient.

Tal: En löpartävling har 52 deltagare. På hur många sätt kan topp-5 listan se ut?

L: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = \frac{52!}{47!}$ //

Tal: Hur många pokerhänder finns det?

L: Vi väljer 5 kort ur en lek om 52

$\Rightarrow \binom{52}{5}$ //