Betingade sannolikheter

Ex: Vid en fartkontroll är hastighetsbegr. 50 km/h. 32 % av alla bilar kör fortare än 50 km/h och 4 % av alla bilar kör " " 70 km/h. Vad är andelen fortkörare som kör över 70 km/h?

$$\frac{0.04}{0.32} = 0.125$$

Dvs. Sannolikheten att en slumpmässigt vald bil kör över 70 km/h givet att den kör över 50 km/h är 0.125 (12.5 %).

Def: Låt $A, B \subset \Omega$ s.a. $\mathbb{P}(B) > 0$.

Då är den betingade sannolikheten för A givet B

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

I vårt ex: $A = \{\text{bil kör} > 70 \text{ km/h}\}$

$B = \{\text{bil kör} > 50 \text{ km/h}\} \Rightarrow$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{då } A \subset B.$$

Ta: Vi kastar tärning 2 ggr.

Givet ögonsumman $= 4$, vad är sann. att vi slog minst en 3:a?

L: Vi har $\Omega = \{(a,b) : 1 \le a, b \le 6\}$

$B = \{\text{ögonsumman} = 4\} = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

$A = \{\text{minst en } 3\text{:a}\} = \{(1,3), (2,3), \ldots, (6,3), (3,1), \ldots, (3,6)\}$

$A \cap B = \{(1,3), (3,1)\}$

Vi får $\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{2/36}{3/36} = \dfrac{2}{3}$ //.

"Att betinga på B är att göra B till det nya Ω"

Sats: Givet $B \subset \Omega$ s.a. $\mathbb{P}(B) > 0$, låt $\mathbb{P}'$ vara funktionen som för varje $A \subset \Omega$ tar värdet $\mathbb{P}'(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$.

Då är $\mathbb{P}'$ ett sannolikhetsmått.

B: Vi måste verifiera att $\mathbb{P}'$ uppfyller de tre villkoren för ett sannolikhetsmått

1)

$\mathbb{P}'(A) \in [0,1] \ \forall \ A \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}'(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq 0 \quad \text{ty} \quad \mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$$

$$\mathbb{P}'(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq 1 \quad \text{ty} \quad \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B).$$

2)

$$\mathbb{P}'(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

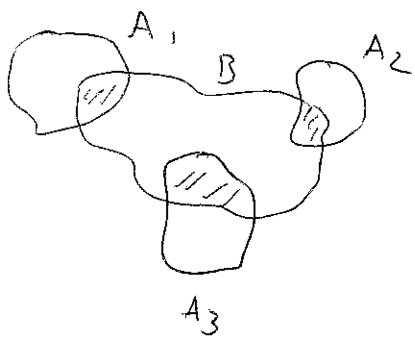
3)

Låt $A_1, A_2, \ldots$ vara disjunkta

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}'\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} \overset{(!)}{=} \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k \mid B)$$

B av (!):



Låt $x \in \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap B \Rightarrow x \in B$ och $x \in A_n$ för minst ett $n \Rightarrow x \in B \cap A_n \Rightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B)$

<u>Tal:</u> I en population är 20 % smittade av TBC. Ett snabbtest ger följande:

i) En smittad får positiv diagnos m.s. 0.9

ii) Ej " " negativ " " 0.7

Vad är sann. att en slumpmässigt vald individ får <u>positiv diagnos</u>?

<u>L:</u> <u>Steg 1 (inför beteckningar):</u>

Låt $S = \{$vald person smittad$\}$

$+ = \{$ " " får pos. diagnos$\}$

$- = \{$ " " " neg. " $\} (= +^c)$

<u>Steg 2 (vad vet vi?)</u>

$$\mathbb{P}(+ \mid S) = 0.9$$

$$\mathbb{P}(- \mid S^c) = 0.7$$

$$\mathbb{P}(S) = 0.2$$

<u>Steg 3:</u> Vi söker $\mathbb{P}(+)$

$$\mathbb{P}(+) = \mathbb{P}(+ \cap S) + \mathbb{P}(+ \cap S^c)$$

$$= \mathbb{P}(+ \mid S)\,\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(+ \mid S^c)\,\mathbb{P}(S^c)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(+ \mid S^c) = 1 - \mathbb{P}(- \mid S^c) = 1 - 0.7 = 0.3 \\ \mathbb{P}(S^c) = 1 - \mathbb{P}(S) = 1 - 0.2 = 0.8 \end{array} \right\}$$

$= 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}42$ //

Anm: ~~Steg 1~~ Första likheten gällde då S och S^C är disjunkta.

Def: $A_1, \dots, A_n$ är en partition av Ω om i) de är alla disjunkta ii) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Sats: Om $A_1, \dots, A_n$ är en partition av Ω har vi att

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_k)\, \mathbb{P}(A_k)$$

för alla $B \subset \Omega$.

Den andra likheten gäller enbart om $\mathbb{P}(A_k) > 0$ $\forall\, k$. (kallas LTP, Lagen om Total Sannolikhet)

B: $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)$ disjunkta!

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) \quad \square$$

Sats: (Bayes sats) Om $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0 \Rightarrow$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

B: $\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ $\square$

Sats: Om $A_1, \ldots, A_n$ är en partition av Ω

$$\mathbb{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}(B \mid A_k)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}$$

B: övning! $\square$

Tal: (forts) a) Givet att en person fått positiv diagnos, vad är sann. att hen är smittad?

L: Vi söker $\mathbb{P}(S \mid +)$ och har

$$\mathbb{P}(S \mid +) = \mathbb{P}(+ \mid S)\,\frac{\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(+)} = 0.9 \cdot \frac{0.2}{0.42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

b) Vad är sann. att testet visar rätt?

L: Låt $R = \{\text{testet är korrekt}\}$. Vi har

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \cap +) + \mathbb{P}(R \cap -) = \mathbb{P}(S \cap +) + \mathbb{P}(S^c \cap -)$$

$$= \mathbb{P}(S)\,\mathbb{P}(+ \mid S) + \mathbb{P}(S^c)\,\mathbb{P}(- \mid S^c)$$

$$= 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.7 = 0.74$$