Oberoende händelser

Intuitivt är A, B oberoende om

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{och} \quad \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B).$$

Problem: kräver $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$.

Istället:

Def: $A, B \subset \Omega$ är oberoende om

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$$

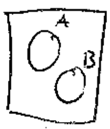
Följd: Om $\mathbb{P}(B) > 0$ och A, B oberoende

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \quad //$$

Def: $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ är (fullständigt) oberoende om för varje ändlig delmängd $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \subset \{1, 2, \ldots\}$ gäller att

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{j_k} \right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{j_k})$$

OBS!!! Oberoende ej samma som disjunkt!

$A \cap B = \emptyset$  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

Om A, B ober, A, C ober och B, C ober.

är då A, B, C ober? Nej (!)

<u>Tal:</u> En krona kastas 2 ggr. Låt

$A = \{$1:a kastet HS, $B = \{$2:a kastet HS

$C = \{$exakt 1 kast HS

a) visa A, B A, C och B, C ober.

b) visa A, B, C ej ober.

<u>L:</u> a) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}((H,H)) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(HT, TH) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(HT) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C)$$

p.s.s. $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$ //

b) $A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$ //

<u>Tal:</u> Antag A, B ober. Visa att a) A^c, B ober

b) A, B^c ober c) A^c, B^c är ober.

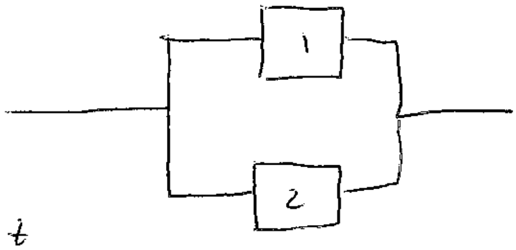
a) B: Måste visa att $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\,\mathbb{P}(B)$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \overset{A,B \text{ ober}}{=} \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

$$= (1 - \mathbb{P}(A))\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c)\,\mathbb{P}(B) \quad \square$$

b), c) övning

Tal: Parallellkoppling



1) komp. fungerar ober.

2) syst. " om minst en komp. fungerar.

3) komp. 1 fungerar m.s. $\frac{1}{2}$

" 2 " " $\frac{1}{3}$

Vad är sann. att systemet fungerar?

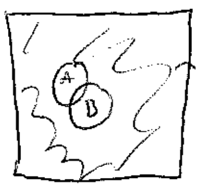
1: $A = \{$komp. 1 fung.$\}$ $B = \{$komp. 2 fung.$\}$

$\{$syst. fung.$\} = A \cup B$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\text{syst. fung.}) = \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}((A \cup B)^c)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c)\,\mathbb{P}(B^c) = 1 - (1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{3})$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}$$



$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

//

Slumpvariabler

En slumpvariabel (stokastisk variabel, s.v.) är en funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

[Kan göras mer generellt. t.ex.

$X = \{$färgen på draget kort ur kortlek$\}$

$X : \Omega \to \{$spader, hjärter, ruter, klöver$\}$]

Ex: Vi kastar tärning 2 ggr X = ögonsumman

$\Omega = \{(a,b) : 1 \le a, b \le 6\}$ $X(a,b) = a+b$

$\{X = 5\} = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$

Diskreta s.v.

Def: En s.v. X är diskret om den endast kan anta ett ändligt eller uppräkneligt oändligt antal värden.

Anm: Vi kommer ofta betrakta

$X : \Omega \to \mathbb{Z}$ $(X \in \mathbb{Z})$

<u>Def:</u> Antag att X kan anta värdena $x_1, x_2, \dots$ Då definieras <u>sannolikhetsfunktionen</u> p_X (slf, pmf = prob. mass fcn) för X som

$$p_X(x_j) := \mathbb{P}(X = x_j) \quad \text{där } j \in \{1, 2, \dots\}$$

<u>Anm:</u> a) p_X ger oss alla sann. för alla värden som X kan anta.

b) Ibland säger man att $\{\mathbb{P}(X = x_j)\}_{j=1}^{\infty}$ är slf

---

<u>Def:</u> Om $X \in \mathbb{R}$ definieras <u>fördelningsfkn</u> (ffkn, cdf = cumulative distr. fcn) av

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

<u>Tal:</u> En slant singlas 6 ggr. Om $X = \# H$, hitta slf och skissa ffkn.

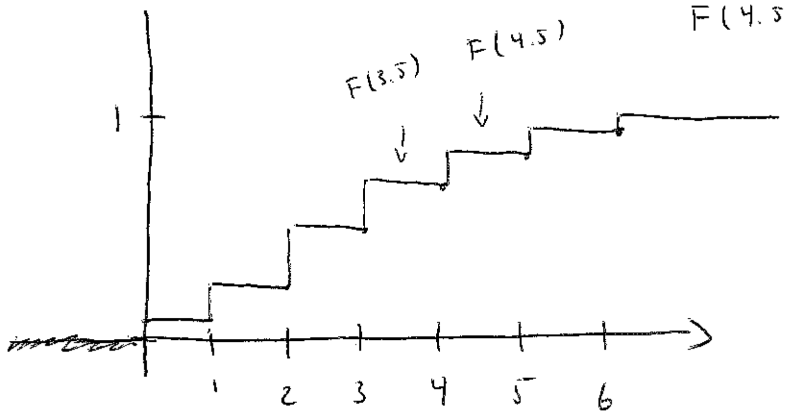
<u>L:</u>

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{2^6}\binom{6}{k} & \text{om } k = 0, 1, \dots, 6 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

ty $\frac{1}{2^6}$ = sann. för fixt utfall & $\binom{6}{k}$ = # utfall med exakt k s.t. H.

$F(4.5) - F(3.5) = \mathbb{P}(X=4)$

ffkn



Anm: 1) För en slf gäller alltid att

$$\sum_{j\geq 1} p_X(x_j) = 1$$

2)

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_j : x_j \leq x} \mathbb{P}(X = x_j)$$

så vet man slf $\Rightarrow$ man vet ffkn

3)

$$p_X(x_j) = F\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) - F\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) \quad (\text{"rita i bild"})$$

om $x_1 < x_2 < x_3 \ldots$

Om $X : \Omega \to \mathbb{Z} \Rightarrow p_X(k) = F(k) - F(k-1)$

Vilken användning har vi av p_X och F_X?

Båda beskriver <u>fördelningen</u> för X.

Γ X är som $f(x)$ i analysen. Att ange <u>fördelningen</u> för X är som att specificera $f(x)$ ($f(x)=e^x$, $f(x) = \sin(x)$ etc)