TMA 321

R1 (1)

1.13) I ett pokerspel. Vad är sannolikheten att man får

a) en stege på given?

b) ett fyrtal – " –

c) en kåk – " –

L: a) Divisionsregeln används lämpligen.

$A = \{\text{stege}\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ där $|\Omega| = \binom{52}{5}$.

$|A|$:

A 2 3 4 5

2 3 4 5 6 ← # sådana är 4^5 (-4!)

3 4 5 6 7

⋮

10 J Q K A

dvs $|A| = 10 \cdot (4^5 - 4) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \dfrac{10(4^5-4)}{\binom{52}{5}}$

b)

A A A A * ← 48 st. 4-tal i A

K K K K *

⋮

2 2 2 2 *

$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{4-tal}) = \dfrac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$

c)

$$\left.\begin{array}{l} AAAKK \leftarrow \binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ AAA22 \leftarrow \binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2} \end{array}\right\} \text{sammanlagt } 12\cdot\binom{4}{3}\binom{4}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} KKKAA \\ \vdots \\ KKK22 \end{array}\right\} 12\cdot\binom{4}{3}\binom{4}{2}$$

$$\Sigma = 13\cdot 12\binom{4}{3}\binom{4}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(kåk) = \frac{12\cdot 13\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

$\underline{1.35}$ Visa a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

och tolka likheterna.

a) $\underline{B:}$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\square$

"välja k objekt och lämna n−k

= " n−k " " " k"

b) $\underline{B:}$ $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$

$$= \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$ $\square$

Vi skall välja k objekt ur n. Vi delar upp i två fall. Fall 1: vi väljer objekt 1, Fall 2: vi väljer ej objekt 1.

sätt välja k ur n = # sätt i fall 1 + # sätt i fall 2

$$\iff \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

1.63 Sann. att bli minst 70 är 0.6 och " " " " 80 är 0.2. Givet att man blir 70, vad är då sann. att man blir minst 80?

L: $A = \{\geq 70\}$, $B = \{\geq 80\}$ söker

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

1.48 En urna har 3 röda och 2 vita bollar. En boll dras och sedan läggs den tillbaka tillsammans med en extra boll av samma färg. Till slut dras en andra boll.

a) Vad är sann att den andra bollen är vit?

b) Om den andra bollen är vit, vad är sann. att den första var röd?

1! Beteckningar: R1 = {1:a boll röd}

R2 = {2:a " "}

V1 = {1:a " vit}

V2 = {2:a " "}

a)

$$\mathbb{P}(V2) = \mathbb{P}(V2 \mid V1)\,\mathbb{P}(V1) + \mathbb{P}(V2 \mid R1)\,\mathbb{P}(R1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} //$$

b)

$$\mathbb{P}(R1 \mid V2) = \mathbb{P}(V2 \mid R1)\,\frac{\mathbb{P}(R1)}{\mathbb{P}(V2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3/5}{2/5} = \frac{1}{2} //$$

2.10| A, B spelar basket $\mathbb{P}(A \text{ tr.}) = p_1$

$\mathbb{P}(B \text{ tr.}) = p_2$

Vi antar att alla försök är oberoende, och att de kastar varannan gång. A börjar

a) Hitta frekvensfkn (slf) för totala # kast.

b) Vad är sann att A träffar först?

L: a) Låt $X = \#$ kast. Vi har:

$$\mathbb{P}(X=1) = p_1 \qquad \mathbb{P}(X=2) = (1-p_1)\,p_2$$

$$\mathbb{P}(X=2k) = (1-p_1)^k (1-p_2)^{k-1} p_2$$

$$\mathbb{P}(X=2k+1) = (1-p_1)^k (1-p_2)^k p_1$$

b)

Metod 1: A vinner på kast 1, 3, 5, ...

dvs $\mathbb{P}(A \text{ vinner}) = p_1 + (1-p_1)(1-p_2)p_1 + (1-p_1)^2(1-p_2)^2 p_1$

$$+ \cdots = p_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left((1-p_1)(1-p_2)\right)^k = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

Metod 2:

$$\mathbb{P}(A \text{ vinner}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \text{ vinner i omgång } \ell)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \text{ vinner} \mid \text{ngn vinner i omg. } \ell)\, \mathbb{P}(\text{ngn vinner omg. } \ell)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}\, \mathbb{P}(\text{ngn vinner omg. } \ell) = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$ //

$\boxed{2.20}$ En rökare har en låda tändstickor i vardera ficka. Dessa innehåller n stickor var. Rökaren väljer fickorna med samma sann. och oberoende.

TMA 321

R1 6

Vad är slf för # stickor i den andra lådan när hen upptäcker att en låda är tom?

<u>1:</u> Låt X = # stickor kvar

H = # " i högra

V = # " i vänstra

Vi söker $\mathbb{P}(X=k)$

Obs $\{X=k\} = \{H=0, V=k,$ hen valde högra fickan gång nr $2n-k+1\} \cup$

$\{V=0, H=k,$ " " vänstra " " " " $\}$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(X=k) = 2\mathbb{P}(H=0, V=k, \text{ valde höger omg. } 2n-k+1)$$

$$= 2\,\mathbb{P}(H=0, V=k)\cdot\frac{1}{2} = \mathbb{P}(H=0, V=k)$$

"= sann att hen på $2n-k$ val valt höger n ggr"

$$= \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} = \binom{2n-k}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$