TMA 321 $\boxed{F4}$ 1

Diskreta s.v. (forts)

Väntevärde och varians

Def: Väntevärdet av en diskret s.v. $X : \Omega \to \{x_1, x_2, \dots\}$ betecknas $\mathbb{E}[X]$ och ges av

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_j} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j)$$

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierar vi

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x_j} f(x_j) \, \mathbb{P}(X = x_j)$$

Def: Variansen av en s.v. $X : \Omega \to \{x_1, x_2, \dots\}$ definieras av $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$

Anm: 1) $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[f(X)]$, $\mathrm{Var}(X)$ får bli $\pm\infty$

2) $\mathrm{Var}(X)$ = "förväntad kvadratisk avvikelse från väntevärdet (mitten)"

~~**Sats:** Om X är s.a. $|\mathbb{E}[X]| < \infty$ och $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ så har vi att~~ ~~i) $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$~~

~~ii) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$~~

Sats (räkneregler för $\mathbb{E}$):

Låt X, Y vara diskreta s.v. och $a \in \mathbb{R}$.

Vi har i) $\mathbb{E}[aX] = a\,\mathbb{E}[X]$
ii) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ } linearitet

B: i) $$\mathbb{E}[aX] = \sum_{x_j} a x_j \,\mathbb{P}(X = x_j) = a \sum_{x_j} x_j \,\mathbb{P}(X = x_j) = a\,\mathbb{E}[X]$$

ii) Antag $X, Y \in \mathbb{Z}$

Här kan vi ta $\Omega = \{(m,n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$.

Vi skriver $\{X = m, Y = n\} = \{X = m \text{ och } Y = n\}$
$= \{X = m\} \cap \{Y = n\}$.

Vi har $\{X = m\} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{X = m, Y = n\}$ s.a.

$$\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{X = m, Y = n\}\right) \underset{\text{disjunkta}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = m, Y = n)$$

Ex: X, Y är resultaten av två tärningskast

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 2) + \dots + \mathbb{P}(X = 3, Y = 6)$$

Vi får $$\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X+Y = k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (k - l + l)\,\mathbb{P}(X = k-l, Y = l) = \left\{ \begin{matrix} m = k - l \\ n = l \end{matrix} \right\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (m+n)\,\mathbb{P}(X = m, Y = n)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = m, Y = n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = m, Y = n)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} m\, \mathbb{P}(X=m) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, \mathbb{P}(Y=n)$$

$$= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \quad //$$

Anm:

1) Ett allmänt bevis är mer ~~te~~tekniskt krävande men följer av samma idé.

2) p.s.s. om $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a, b \in \mathbb{R}$ får vi

$$\mathbb{E}[a f(X) + b g(Y)] = a\, \mathbb{E}[f(X)] + b\, \mathbb{E}[g(Y)]$$

Tal: Låt $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ vara resultaten av 100 tärningskast. Beräkna $\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{100} X_k\right]$.

L: Metod 1: Låt $Z = X_1 + \dots + X_{100}$. Hitta $\mathbb{P}(Z=100), \mathbb{P}(Z=101), \dots, \mathbb{P}(Z=600)$ för att sedan räkna ut $\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=100}^{600} k\, \mathbb{P}(Z=k)$

Metod 2:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{100} X_k\right] = \sum_{k=1}^{100} \mathbb{E}[X_k] = 100\, \mathbb{E}[X_1]$$

$$= 100 \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6} = 100 \cdot 3.5 = 350 \quad //$$

Sats: Om $X : \Omega \to \{x_1, x_2, \dots\}$ där

$|E[X]| < \infty$ och $E[X^2] < \infty$ så gäller

i) $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$

ii) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$

B: i) låt $\mu = E[X]$.

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[(X-\mu)^2]$$

$$= E[X^2 + \mu^2 - 2\mu X] = E[X^2] + E[\mu^2] - 2\mu E[X]$$

$$= E[X^2] + \mu^2 - 2\mu \cdot \mu = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

ii)

$$\mathrm{Var}(aX + b) = E[(aX + b - E[aX + b])^2]$$

$$= E[(aX - aE[X])^2] = a^2 E[(X - E[X])^2] = a^2 \mathrm{Var}(X) \quad \square$$

Anm: $\mathrm{Var}(X) \geq 0$. Om $\mathrm{Var}(X) = 0 \iff X$ konstant

---

Några diskreta standardfördelningar

Vi gör ett experiment som kan lyckas/missl. med sann. p resp. $1-p$. Låt $X = 1$ om exp. lyckas och annars $X = 0$.

s.v. X är då Bernoulli-fördelad med parameter p. ($X \sim Be(p)$).

Vi har $\mathbb{E}[X] = 1\,\mathbb{P}(X=1) + 0\,\mathbb{P}(X=0) = p$.

Tal:
Antag att vi gör n oberoende försök där varje försök lyckas m.s. p. Låt X = # lyckade försök. Bestäm slf för X.

1: Vi skall bestämma $\mathbb{P}(X=k)\ \forall k$.

Vi har att

$$\mathbb{P}(X=k) = (\#\text{ försökssekvenser med exakt } k \text{ lyckade})$$
$$\times (\text{sann för en fix sekv. med exakt } k \text{ lyckade}),$$
$$= A \cdot B$$

Försök nr:	1	2	3	4	......	n-1	n
exakt → k lyckade	l	m	m	l		l	m
	p	$(1-p)$	$(1-p)$	p	......	p	$(1-p) = p^k(1-p)^{n-k}$

dvs $B = p^k(1-p)^{n-k}$

A = # sätt välja k ur $n = \binom{n}{k}$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \quad //$$

Def: En s.v. X är binomialfördelad med parametrar $n \in \mathbb{N}^+$ och $0<p<1$ ($X \sim Bin(n,p)$) om

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0,\dots,n.$$

Tal: Låt $X \sim Bin(n,p)$. Beräkna $\mathbb{E}[X]$.

1: Metod 1:
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

= räkna som en galning ... = ?

Metod 2: Låt $X_k = \begin{cases} 1 & \text{om exp. } k \text{ lyckat} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim Bin(n,p)$$

Be(p)!

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = \sum_{k=1}^{n} p = np \quad ///$$

slut F4 2017

Def: Låt $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ vara någon mängd. Vi säger att X är likformigt fördelad på mängden A ($X \sim U(A)$) om

$$\mathbb{P}(X = a_k) = \frac{1}{|A|} \quad k=1,\dots,n$$

TMA 321

$\boxed{F4}$ 7

Tal: Låt $X \sim U\{-5,-1,2,7\}$ beräkna $\mathbb{E}[X]$

L: $\mathbb{E}[X] = \sum_k k\,\mathbb{P}(X=k) = -5\,\mathbb{P}(X=-5) - 1\,\mathbb{P}(X-1)$

$+ 2\,\mathbb{P}(X=2) + 7\,\mathbb{P}(X=7) = -\frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3}{4}$ //