Fler standardfördelningar

Kom ihåg $X \sim Bin(n,p)$ om vi har n ober. försök som lyckas m.s. p.

Ofta har vi n mkt stort och p mkt litet.

Tal: Maria har ett radioaktivt prov med $n = 10^{20}$ radioaktiva atomkärnor. Under en sekund är sann. för att en fix kärna sönderfaller $3 \cdot 10^{-19}$. Vad är sann att högst fem kärnor sönderfaller under en fix sekund? Vi antar inga kedjereaktioner.

L: $X = \#$ sönderfall under fix sekund

$\Rightarrow$ $X \sim Bin(10^{20}, 3 \cdot 10^{-19})$. Vi söker

$$\mathbb{P}(X \leq 5) = (1-3\cdot 10^{-19})^{10^{20}} + 10^{20}(1-3\cdot 10^{-19})^{10^{20}-1} 3\cdot 10^{-19} + \dots$$

mkt besvärligt.

Def: X är Poisson-fördelad med parameter $\lambda > 0$ $(X \sim Poi(\lambda))$ om

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad k=0,1,\dots$$

FS ②

Sats:
Om $X_n \sim Bin(n, p_n)$ där $np_n \to \lambda$ $n \to \infty$

så gäller att $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$ där

$X \sim Poi(\lambda)$.

B: Fixera k.

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!\, n^k} (np_n)^k (1-p_n)^{n-k} \quad (*)$$

i/ $(np_n)^k \to \lambda^k$

ii/ $(1-p_n)^{n-k} \to e^{-\lambda}$ $\ulcorner$ $(1+a_n)^{b_n} \to e^c$ om $a_nb_n \to c$ och $a_n \to 0$ $\lrcorner$

iii/ $\frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \to 1$

$\Rightarrow$ $(*) \to \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$ $\square$

(1 tal att): $X \sim Poi(\lambda)$ $\lambda = np = 10^{20} \cdot 3 \cdot 10^{-19} = 30$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \le 5) = \sum_{k=0}^{5} e^{-30} \cdot \frac{(30)^k}{k!} \quad //$$

Tal: Emilia skjuter straffar. Varje straff sitter m.s. p oberoende. Låt $X = \#$försök som Emilia behöver t.o.m. första träffen.

Hitta slf för X.

L: $\mathbb{P}(X=k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{k-1 \text{ missar}} \cdot \underbrace{p}_{\text{sista träff}} \qquad k = 1, 2, \ldots$ //

Def: X är geometriskt fördelad med parameter $0<p<1$ ($X \sim Geom(p)$) om

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} p \qquad k = 1,2,\ldots$$

"Varianter finnes!"

Tal: Samma som innan, men X = # försök t.o.m. träff nr r.

L: Om $X=k$ måste straff k vara träff nr r. Dessutom måste $r-1$ av de föregående $k-1$ straffarna vara träff. En fix sekvens med $r-1$ träff och $k-1-(r-1) = k-r$ bom har sann. $p^{r-1}(1-p)^{k-r}$. Vi får

$$\mathbb{P}(X=k) = (\#\text{sekv.}) \cdot (\text{sann. för sekv}) \cdot \text{sann sista träff}$$

$$= \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{k-r} \cdot p = \binom{k-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{k-r}$$ //

Def: X är negativt binomialfördelad med parametrar r, p ($X \sim NegBin(r,p)$) om

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \qquad k = r, r+1, \dots$$

Kontinuerliga s.v.

Def: En s.v. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kallas kontinuerlig om det $\exists$ $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ s.a. $\forall\, t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds$$

Anm: 1) Funktionen $f(t)$ kallas täthetsfunktion (fth, pdf = prob. dens. fcn) och $F(t) = \mathbb{P}(X \le t)$ är fördelningsfunktionen ($f$thn).

2) Vi har $F'(t) = f(t)$ och $\mathbb{P}(t < X \le t+h)$

$= F(t+h) - F(t) \approx h F'(t) = h f(t)$

3) $f(t)$ alt $F(t)$ anger fördelningen för motsvarande kont. s.v. X.

4) Vi har alltid att $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds = 1$

ty $1 = \mathbb{P}(-\infty < X < \infty) = \mathbb{P}(\text{ngt händer}) = \mathbb{P}(\Omega)$

5)
$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = \lim_{t \to -\infty} \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = 0$$

och
$$\lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{t \to \infty} \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = 1$$

Dessutom gäller att för $h \geq 0$

$$F(t+h) - F(t) = \int_{-\infty}^{t+h} f(s)\,ds - \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = \int_{t}^{t+h} f(s)\,ds \geq 0$$

Så $F(t)$ är icke-avtagande.

6) Vi har att

$$\mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(\{X < b\} \setminus \{X < a\})$$
$$= \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a) = \int_{a}^{b} f(s)\,ds$$

7)
$$\mathbb{P}(X = a) = \int_{a}^{a} f(s)\,ds = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a)$. Detta gäller ej om X är diskret.

Def: Om X har tfkn $f(s)$ definierar vi väntevärdet av X genom

$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} s f(s) ds$. Om $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. vi

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) f(s) ds.$$

Variansen $\mathrm{Var}(X)$ def. av

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (s - \mathbb{E}[X])^2 f(s) ds$$

Som innan: i) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

ii) $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$

Def: För $0 < \alpha < 1$ definieras α-kvantilen t_α som lösningen till $F(t_\alpha) = 1 - \alpha$

Ex: $t_{1/2}$ = median

$t_{1/4}$ = undre kvartilen

$t_{3/4}$ = övre kvartilen // slut FS 2017

Def: En s.v. X är exponentialfördelad med parameter $\lambda > 0$ ($X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$) om

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad t > 0$$

Anm: $f(t)=0$ $t\leq 0$ underförstått!

Användning: Låt T = tiden för en kol-14 atom att sönderfalla. Då är $T \sim Exp(\lambda)$.

Tal: Hitta $t_{1/2}$ för $T \sim Exp(\lambda)$.

L: $$\frac{1}{2} = F(t_{1/2}) = \int_{-\infty}^{t_{1/2}} f(s)\,ds = \int_0^{t_{1/2}} \lambda e^{-\lambda s}\,ds$$

$$= \left[-e^{-\lambda s}\right]_0^{t_{1/2}} = 1 - e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow e^{-\lambda t_{1/2}} = +\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\lambda t_{1/2} = \log\frac{1}{2} = -\log 2 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda}$$

"tolkning? halveringstid!"

Tal: En sönderfalls tid $T \sim Exp(\lambda)$. Vilken är den förväntade livslängden?

L: Vi söker $\mathbb{E}[T]$. Vi har

$$\mathbb{E}[T] = \int_{-\infty}^{\infty} s f(s)\,ds = \int_0^{\infty} s\lambda e^{-\lambda s}\,ds = \left[-se^{-\lambda s}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda s}\,ds$$

$$= 0 + \left[-\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$