TMA 321 $\boxed{F6}$ 1

Funktioner av s.v.

Om X är en s.v. och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kan vi def en ny s.v. Y via $Y = g(X)$.

Om X har känd fördelning (slf, tthn)

vilken fördelning har då Y?

Då X har tthn $f_X(s)$ har Y tthn

$$f_Y(s) = g(f_X(s))$$

Nej!!!

i) $g < 0 \Rightarrow$ kan bli neg.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} g(f_X(s))ds \neq 1$

Istället går vi via fthn:

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(g(X) \leq t) \text{ "=" } \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(t))$$

$= F_X(g^{-1}(t))$. Vi får sedan att

$$f_Y(t) = F'_Y(t).$$

TMA 321

$\boxed{F6}$ 2

Tal: Låt $X \sim Exp(\lambda)$. Bestäm fördelningen för X/r där $r > 0$.

L: Vi får

$$F_{X/r}(t) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{r} \le t\right) = \mathbb{P}(X \le rt) = F_X(rt).$$

Vidare är $F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = \left[-e^{-\lambda s}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} \qquad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{X/r}(t) = F_X(rt) = 1 - e^{-\lambda r t} \qquad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad f_{X/r}(t) = F'_{X/r}(t) = \lambda r e^{-\lambda r t} \qquad t > 0.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X}{r} \sim Exp(\lambda r) //$$

Def: X är likformigt fördelad på $[a,b]$ där $a < b$ om

$$f_X(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{om } a \le s \le b \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi skriver $X \sim U[a,b]$

Tal: Låt $X \sim U[-1,1]$, Vilken tthn har X^2?

L: Vi har $X^2 \ge 0 \Rightarrow f_{X^2}(t) = 0 \quad t \le 0.$

För $0 \le t \le 1$ har vi att

$$F_{X^2}(t) = \mathbb{P}(X^2 \le t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t})$$

$$= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(s)\,ds = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{2}\,ds = \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow \quad f_{X^2}(t) = F'_{X^2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{för } 0 \le t \le 1.$$

Slutligen har vi att om $t > 1 \Rightarrow F_{X^2}(t) = 1$

$\Rightarrow \quad f_{X^2}(t) = 0.$ Dvs $f_{X^2}(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \quad 0 \le t \le 1.$

Följande satser är användbara för att generera s.v. med önskad ffkn.
Här antas F strikt växande på sin def.-mängd.

Sats: Om X har ffkn $F(t)$ och $Z = F(X)$ så är $Z \sim U[0,1]$.

B: $\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(F(X) \leq z) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(z))$

$= F(F^{-1}(z)) = z$ $\square$

Sats: Låt $U \sim U[0,1]$ och låt $X = F^{-1}(U)$. Då har X ffkn $F(t)$.

B: $\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F(t)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ty } U \sim U[0,1]}}{=} F(t)$ $\square$

Tal: Låt $U \sim U[0,1]$. Hitta lämplig funktion g s.a. om $X = g(U) \Rightarrow X \sim Exp(\lambda)$.

L: Enligt satsen ovan skall $g = F^{-1}$ där F är ffkn för en $Exp(\lambda)$-förd. s.v.

Om $Y \sim Exp(\lambda) \Rightarrow F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds$

$= \left[-e^{-\lambda s}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

Om $y = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow e^{-\lambda t} = 1 - y \Rightarrow -\lambda t = \log(1-y)$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\log(1-y)}{-\lambda} = F^{-1}(y)$$

Därmed får vi att $X = F^{-1}(U) = \dfrac{\log(1-U)}{-\lambda}$ //

Normalfördelningen

Def: En s.v. X är normalfördelad med parametrar $\mu \in \mathbb{R}$ och $\sigma^2 > 0$ ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) om

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Anm: Om $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ skriver vi $Z \sim N(0,1)$ och Z sägs vara en standardiserad normalfördelad s.v.

Man skriver ofta $\phi(t)$ för tfkn $f_Z(t)$

och
$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(s)\,ds = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}\,ds$$

för fthn