TMA 321 $\boxed{R2}$ ①

$\underline{2.11}$ Betrakta $X \sim Bin(n,p)$. Vilket k maximerar $\mathbb{P}(X=k)$?

$\underline{L}$: Vi har att $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Betrakta
$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} \cdot \frac{p}{1-p}$$

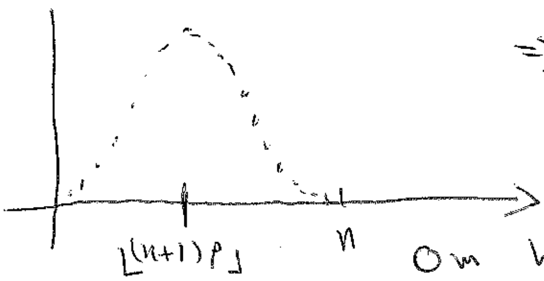
$$= \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}.$$ Vi har därför att

$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \geq 1 \iff np - kp \geq (k+1)(1-p)$$

$$= k+1-kp-p \iff (n+1)p \geq k+1$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}(X=k+1) \geq \mathbb{P}(X=k)$ om $k+1 \leq (n+1)p$ $\Rightarrow$ $k+1 \leq \lfloor (n+1)p \rfloor$

$\mathbb{P}(X=k+1) \leq \mathbb{P}(X=k)$ om $k+1 > (n+1)p$



$\Rightarrow$ maximeras då
$$k+1 = \lfloor (n+1)p \rfloor$$
//

Om $k+1 \leq \lfloor (n+1)p \rfloor$ välj $k+1$ ist för k

" " $>$ " k " " $k+1$

$\underline{2.21}$ Låt $\underline{X} \sim \text{Geom}(p)$. Visa att

$$\mathbb{P}(\underline{X} > n+k-1 \mid \underline{X} > n-1) = \mathbb{P}(\underline{X} > k)$$

Är detta uppenbart?

$\underline{1}$: Vi räknar: Då $\mathbb{P}(\underline{X} = k) = p(1-p)^{k-1}$

får vi att $\mathbb{P}(\underline{X} > m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$

$$= p(1-p)^m \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p(1-p)^m \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^m.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\underline{X} > n+k-1 \mid \underline{X} > n-1) = \frac{\mathbb{P}(\underline{X} > n+k-1, \underline{X} > n-1)}{\mathbb{P}(\underline{X} > n-1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\underline{X} > n+k-1)}{\mathbb{P}(\underline{X} > n-1)} = \frac{(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^{n-1}} = (1-p)^k = \mathbb{P}(\underline{X} > k)$$

Uppenbart? $\underline{X} > m \Rightarrow m$ misslyckade $\Rightarrow \mathbb{P}(\underline{X} > m) = (1-p)^m$

$\mathbb{P}(\underline{X} > n+k-1 \mid \underline{X} > n-1)$ Om jag missat $n-1$ ss,

vad är sann. att jag missar k till?

Oberoende så samma som $\mathbb{P}(\underline{X} > k)$.

2.34 Låt $f(x) = \frac{1+\alpha x}{2}$ där $-1 \le x \le 1$

och $-1 \le \alpha \le 1$. Visa att f är en tfkn

och bestäm dess ffkn, ~~Hitta~~ median och

kvartiler.

L: En tfkn shall vara positiv och

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Då $\alpha x \ge -1 \Rightarrow f(x) \ge 0$ ok.

Vidare är $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1+\alpha x}{2}\,dx = 1 + \alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$ //

Vi får att om i) $t < -1$ $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = 0$

om ii) $-1 \le t \le 1$ $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{-1}^{t} f(x)\,dx$

$$= \int_{-1}^{t} \frac{1+\alpha x}{2} = \frac{1}{2}\left[x + \alpha\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{t} = \frac{1}{2}\left(t + \alpha\frac{t^2}{2} - \left(-1 + \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + t + \frac{\alpha}{2}(t^2 - 1)\right)$$

iii) om $t > 1 \Rightarrow F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$

så

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < -1 \\ \frac{1}{2}\left(1 + t + \frac{\alpha}{2}(t^2 - 1)\right) & -1 \le t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$ //

TMA 321 $\boxed{R2}$ (4)

$\underline{4.2}$ Låt $\underline{X}$ ha ffkn $F(x)=1-x^{-\alpha}$, $x\geq 1$.

a) För vilka värden på α är $|\mathbb{E}[X]|<\infty$?

b) " " " " " " $\mathrm{Var}(X)<\infty$?

$\underline{L:}$ Om $F(x)=1-x^{-\alpha}$ $\Rightarrow$ $f(x)=F'(x)=\alpha x^{-\alpha-1}$ $x\geq 1$.

a) Vi får att

$$\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\int_{1}^{\infty} x\alpha x^{-\alpha-1}dx=\alpha\int_{1}^{\infty} x^{-\alpha}dx$$

$$=\alpha\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{\infty}=\frac{-\alpha}{1-\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha-1} \quad \text{om} \quad \alpha>1 \quad \text{och}$$

$$\mathbb{E}[X]=\alpha \quad \text{om} \quad \alpha\leq 1.$$

b) Vi använder att $\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2$.

Vi har att

$$\mathbb{E}[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx=\alpha\int_{1}^{\infty} x^{1-\alpha}dx=\alpha\left[\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_1^{\infty}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-2} \quad \text{om} \quad \alpha>2 \quad \text{och} \quad \mathbb{E}[X^2]=\infty \quad \text{om} \quad \alpha\leq 2.$$

Så $\mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha}{\alpha-2}-\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2$ för $\alpha>2$.

4.26) Ett linjesegment av längd 1 klipps av slumpmässigt. Hitta väntevärdet av kvoten mellan den långa och den korta delen.

"slumpmässigt = likformigt"

L: Vi låter brytpunkten betecknas av U och har att $U \sim U[0,1]$. Vad eftersöks?

$$\text{kvoten} = \frac{\max(U, 1-U)}{\min(U, 1-U)}$$ och vi får att

$$\mathbb{E}\left[\frac{\max(U,1-U)}{\min(U,1-U)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\max(x,1-x)}{\min(x,1-x)} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\max(x,1-x)}{\min(x,1-x)}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1-x}{x}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{x}{1-x}\,dx$$

$$= 2\int_0^{1/2} \frac{1-x}{x}\,dx = 2\int_0^{1/2} \frac{1}{x} - 1\,dx = 2\Big[\log(x) - x\Big]_0^{1/2} = \infty$$