Kom ihåg: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ om

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$Z \sim N(0,1) \leftarrow$ standardiserad normalfördelning.

Om $X \sim N(2,3)$ då blir

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{6}} dx$$

Svår (omöjlig!?) att lösa för hand.

Istället används tabell, men bara för $N(0,1)$!

Sats: Om $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

B: "fkn av s.v."

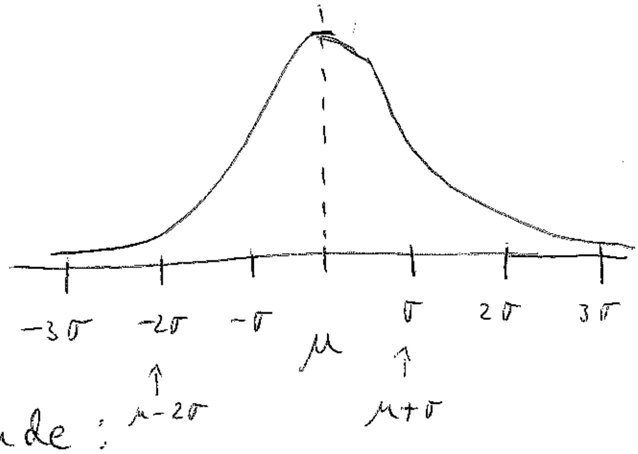
$$F_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq t\right) = \mathbb{P}(X \leq \mu + \sigma t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu+\sigma t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2} ds = \left\{ \begin{array}{l} \frac{s-\mu}{\sigma} = x \Rightarrow s = \mu + \sigma x \\ \Rightarrow ds = \sigma dx \end{array} \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sigma dx = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad \square$$

Såhär ungefär ser $f_X(t)$ ut om

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$



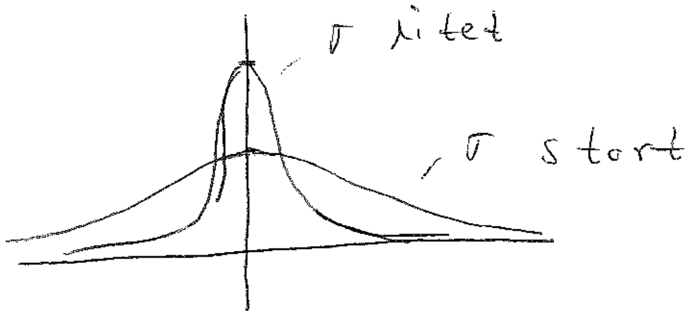
Ofta förekommande:

$$\mathbb{P}(|X-\mu| < 1.96\sigma) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| < 1.96\right) = 0.95$$

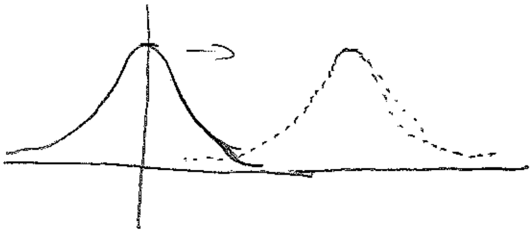
$$\mathbb{P}(|X-\mu| < 2.58\sigma) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| < 2.58\right) = 0.99$$

vi använder tabell!

Då σ ökar blir tfkn plattare:



Om vi ändrar μ translateras grafen



<u>Tal:</u> Låt $\underline{X} \sim N(1.3, 0.36)$

Vad är $\mathbb{P}(0.9 \leq \underline{X} \leq 1 \cup \underline{X} \geq 1.2)$?

<u>L:</u>

$$\mathbb{P}(0.9 \leq \underline{X} \leq 1 \cup \underline{X} \geq 1.2)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{0.9-1.3}{\sqrt{0.36}} \leq \frac{\underline{X}-1.3}{\sqrt{0.36}} \leq \frac{1-1.3}{\sqrt{0.36}} \right) + \mathbb{P}\left(\frac{\underline{X}-1.3}{\sqrt{0.36}} \geq \frac{1.2-1.3}{\sqrt{0.36}} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-\frac{2}{3} \leq Z \leq -\frac{1}{2}\right) + \mathbb{P}\left(Z \geq -\frac{1}{6}\right) \quad (\text{där } Z \sim N(0,1))$$

Tabell (sid A7) ger:

$$\mathbb{P}\left(Z \geq -\frac{1}{6}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{6}\right) \approx 0.566$$

$$\mathbb{P}\left(-\frac{2}{3} \leq Z \leq -\frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{2}{3}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{2}{3}\right) - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0.747 - 0.6915$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(0.9 \leq \underline{X} \leq 1 \cup \underline{X} \geq 1.2) = 0.566 + 0.747 - 0.6915 \approx 0.62$$

Hypergeometrisk fördelning

Vi har en population med N individer.

Låt p vara andelen med en viss egenskap

(t.ex. p=andelen blonda, p=andelen med cancer e.t.c.)

Välj ut n individer slumpmässigt och låt

X = # med egenskapen. Vilken slf har X?

Vi får

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\text{\# sätt välja } k \text{ av } Np \times \text{\# sätt välja } n-k \text{ av } N(1-p)}{\text{\# sätt välja } n \text{ av } N}$$

i) # sätt välja k ur $Np = \binom{Np}{k}$

ii) –"– " $n-k$ " $N(1-p) = \binom{N(1-p)}{n-k}$

iii) –"– " n " $N = \binom{N}{n}$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Def: X är hypergeometriskt fördelad med parametrar N, n, p ($X \sim Hg(N,n,p)$) om

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ där } \begin{array}{l} k \le n,\ k \le Np \\ k \ge 0,\ k \ge n - N(1-p) \\ n \le N \end{array}$$

Anm: 1/ Detta skrivs ibland $Hg(N, n, m)$

där $m = Np$

2/ Om Np, $N(1-p)$ stort och n litet så blir valen approximativt

Oberoende: Säg att $N = 2\cdot 10^7$, $p = \frac{1}{2}$. Om vi

valt en person som hade egenskapen är det

nu $\frac{Np-1}{N-1} = \frac{10^7-1}{2\cdot 10^7-1} \approx \frac{1}{2}$ som är proportionen

med egenskapen. Dvs om $X \sim Hg(N, n, p)$ och

Np stor $\Rightarrow$ $X \approx Bin(n, p)$.

Ex: En medicinsk studie syftar till att

se om aspirin hjälper mot hjärtattack?

Man gav 11034 placebo och 11037 aspirin.

Studien bestod av $N = 11034 + 11037 = 22071$

individer med proportionen $p = \frac{11034}{22071}$ som

fick placebo.

Vi antar att aspirin ej påverkar (H_0)

Efter 10 år hade $n = 293$ fått hjärtattack,

varav 189 kom från placebogruppen. Vilken

slutsats kan vi dra om H_0?

Låt X = # från placebogruppen med h.-a.

Under H_0 är $X \sim Hg(22071, 293, \frac{11034}{22071})$

Vi har att $\mathbb{P}(X = 189) = \cdots = 0.00000015$.

Är H_0 rimligt?

Tal: Kalle spelar bridge. Vad är sann. att han får en hand med högst en hjärter?

1: Låt X = # hjärter. Vilken fördelning har X? N = # kort $= 52$, n = # kort Kalle får $= 13$

$p = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ = andelen hjärter.

Då är $X \sim Hg(N, n, p) = Hg(52, 13, \frac{1}{4})$

Vi söker $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)$

$$= \frac{\binom{Np}{0}\binom{N(1-p)}{13}}{\binom{N}{13}} + \frac{\binom{Np}{1}\binom{N(1-p)}{12}}{\binom{N}{13}}$$

$$= \frac{\binom{13}{0}\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} + \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{12}}{\binom{52}{13}} \quad //$$

Tal: Vad är sann att Kalle får exakt 1 hjärter och 3 spader?

1: Låt X_1 = # hjärter och X_2 = # spader.

Vi kan beräkna $\mathbb{P}(X_1=1)$ och $\mathbb{P}(X_2=3)$,

men vad blir $\mathbb{P}(X_1=1, X_2=3)$?

Intuitionen säger att X_1, X_2 ej är oberoende.

så $\mathbb{P}(X_1=1, X_2=3) \neq \mathbb{P}(X_1=1)\,\mathbb{P}(X_2=3)$

Vi använder divisionsregeln:

händer med 1h, 3s och 9 r/k är $\binom{13}{1}\binom{13}{3}\binom{26}{9}$

så att

$$\mathbb{P}(X_1=1, X_2=3) = \frac{\binom{13}{1}\binom{13}{3}\binom{26}{9}}{\binom{52}{13}} \quad //$$