Flerdimensionella fördelningar

En flerdim. s.v. $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ och skrivs

ofta $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n)$.

Diskreta fallet

Fördelningen för en diskret s.v.

definieras av dess slf:

$$p_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 = x_1, \dots, \mathbb{X}_n = x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

eller ffkn

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 \le x_1, \dots, \mathbb{X}_n \le x_n)$$

$$= \sum_{y_1 \le x_1} \cdots \sum_{y_n \le x_n} p_{\mathbb{X}}(y_1, \dots, y_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Def: För en s.v. $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$ kallas s.v. $\mathbb{X}_1$, s.v. $\mathbb{X}_2$, etc för dess marginaler och deras fördelningar kallas marginalfördelningar.

Def: $(X_1, \ldots, X_n)$ är oberoende omm

$\forall\ (x_1, \ldots, x_n)$

$$F_X(x_1, \ldots, x_n) = F_X(x_1) \cdot \ldots \cdot F_X(x_n).$$

Anm: 1) Ingen av dessa def. kräver att X är diskret.

2) Om X är diskret har vi att

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

ger oss marginal-slf för X_1.

3) Antas $X, Y \in \mathbb{Z}$ är oberoende. Vi har att

$$\mathbb{P}(X \leq k, Y = l) = \mathbb{P}(X \leq k, Y \leq l) - \mathbb{P}(X \leq k, Y \leq l-1)$$

$$\underset{\text{ober.}}{=} \mathbb{P}(X \leq k)\,\mathbb{P}(Y \leq l) - \mathbb{P}(X \leq k)\mathbb{P}(Y \leq l-1) = \mathbb{P}(X \leq k)\,\mathbb{P}(Y = l)$$

och

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(X \leq k, Y = l) - \mathbb{P}(X \leq k-1, Y = l)$$

$$= \cdots = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l).$$

I allmänhet gäller att $(X_1, \ldots, X_n)$ ober $\iff$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k) \quad \forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Betingad diskret fördelning

Def: Låt (X,Y) vara två diskreta s.v.

Den betingade slf för X givet $Y=y$

betecknas $p_{X|Y}(x|y)$ och ges av

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \quad \text{om} \quad p_Y(y) > 0.$$

Om istället $p_Y(y)=0$ låter vi $p_{X|Y}(x|y)=0$.

Tal: i) kasta tärning och låt X = resultatet

ii) singla slant X ggr och låt $Y = \# H$

Ta fram den gemensamma slf för (X,Y)

L: marginal-slf för X: $\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{6}$ $n=1,2,\dots,6$.

Dessutom är $p_{Y|X}(k|n) = \mathbb{P}(Y=k \mid X=n) = \binom{n}{k} 2^{-n}$

$k=0,1,\dots,n$

Vi får då att

$$p_{XY}(n,k) = \mathbb{P}(X=n, Y=k) = \mathbb{P}(Y=k \mid X=n)\, \mathbb{P}(X=n)$$

$$= \frac{1}{6}\binom{n}{k} 2^{-n} \quad \text{för } 0 \le k \le n,\ n=1,2,\dots,6,$$

Kom ihåg: Om $X \sim Bin(n,p)$ räknar

$X = \#$ lyckade försök (utav n oberoende).

Ofta har vi fler kategorier

(bra/godkänt/dåligt, röd/grön/gul/vit),

Antag att vi gör n oberoende försök med r möjliga utfall. Låt

X_i = # försök med utfall $i = 1, \ldots, r$

och låt p_i vara sann. att ett visst försök har utfall $i = 1, \ldots, r$.

Vad är den gemensamma slf för $(X_1, \ldots, X_r)$?

Dvs vad är $\mathbb{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r)$?

Exp nr:	1	2	3	4	- - - - - - - - - -	$n-2$	$n-1$	n
Utfall:	7	$r-1$	1	1		6	r	r
Sann:	p_7	p_{r-1}	p_1	p_1		p_6	p_r	p_r

En fix sekvens med k_i utfall av sort i har sann $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$. Hur många sådana sekvenser finns det?

1) vi väljer k_1 ur n på $\binom{n}{k_1}$ sätt.

2) Det återstår $n-k_1$ och av dessa kan vi välja k_2 på $\binom{n-k_1}{k_2}$ sätt.

3) " " " k_3 ur $n-k_1-k_2$ " $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$

⋮

r)

Vi får att # sekvenser blir

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}{k_r}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\cancel{(n-k_1-k_2)!}} \cdot \cdots \cdot 1 = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!}$$

$$= \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} \leftarrow \text{multinomialkoefficient}$$

<u>Def:</u> $\underline{X} = (\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_r)$ är multinomialfördelad med parametrar $n \in \mathbb{N}^+$ och $p_1, \ldots, p_r$ s.a. $p_i \geq 0 \; \forall \; i = 1, \ldots, r$ och $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ om slf ges av

$$p_{\underline{X}}(k_1, \ldots, k_r) = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

$\forall \; (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ s.a. $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Vi skriver $\underline{X} \sim Mn(n; p_1, \ldots, p_r)$

<u>Ex (Yatzy):</u> Kasta 5 tärningar och låt $\underline{X}_i$ = # tärningar med res. i. Vad är

$\mathbb{P}(\underline{X}_1 = 2, \underline{X}_3 = 3)$?

Ex: $\underline{X} = (\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_6) \sim Mn(5; \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{6})$

Vi får att $\mathbb{P}(\underline{X}_1 = 2, \underline{X}_3 = 3) = \binom{5}{2,0,3,0,0,0} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^3 (\cdots$

$= \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{6}\right)^5$ //

Om $\underline{X} = (\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_r) \sim Mn(n; p_1, \dots, p_r)$, vilken marginalfördelning har $\underline{X}_1$?

Vi ser här uttall 1 som lyckat och alla andra resultat som misslyckade. Vi inser att $\underline{X}_1 \sim Bin(n, p_1)$.

Vad med $\underline{X}_1 + \underline{X}_2$? $\underline{X}_1 + \underline{X}_2 \sim Bin(n, p_1 + p_2)$.

Tal: Lisa kastar n tärningar. Låt

$X_i = \#$ med res. i.

a) Hitta den betingade slf för X_1

givet $X_6 = k$.

1: Vad borde vi få?

Räkning: Vi har att

$$p_{X_1|X_6}(\ell|k) = \mathbb{P}(X_1=\ell \mid X_6 = k) = \frac{\mathbb{P}(X_1=\ell, X_6=k)}{\mathbb{P}(X_6=k)}$$

$$= \frac{\binom{n}{\ell, k, n-\ell-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{\ell}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-\ell-k}}{\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}}$$

$$= \frac{\frac{n!}{\ell!\,k!\,(n-\ell-k)!} \quad 4^{n-\ell-k}}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad 5^{n-k}}$$

$$= \binom{n-k}{\ell}\left(\frac{1}{5}\right)^{\ell}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-\ell-k} \quad \text{så} \quad p_{X_1|X_6}(\ell|k) \sim \mathrm{Bin}\left(n-k, \frac{1}{5}\right)$$

b) (överkurs) Hitta den gemens. betingade

slf för (X_1, X_2) givet $X_6 = k$.

1:

$$p_{X_1, X_2|X_6}(\ell_1, \ell_2|k) = \frac{\mathbb{P}(X_1=\ell_1, X_2=\ell_2, X_6=k)}{\mathbb{P}(X_6=k)}$$

$$= \frac{\binom{n}{k, l_1, l_2, n-l_1-l_2-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{l_1+l_2+k} \left(\frac{3}{6}\right)^{n-l_1-l_2-k}}{\binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}}$$

$$= \frac{\frac{n!}{k!\, l_1!\, l_2!\, (n-l_1-l_2-k)!} \, 3^{n-l_1-l_2-k}}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \, 5^{n-k}}$$

$$= \binom{n-k}{l_1, l_2, n-l_1-l_2-k} \left(\frac{1}{5}\right)^{l_1} \left(\frac{1}{5}\right)^{l_2} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-l_1-l_2-k}$$

så $Mn\left(n-k; \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$ (egentl. $(X_1, X_2, X_{\text{övrigt}})$) //