Poisson-processer

En Poisson-process beskriver fördelningen av slumpmässiga händelser i en mängd $S \subset \mathbb{R}^d$ (mer generella existerar).

För en Poisson-process (PP) gäller att om $S_1, \dots, S_n \subset S$ är disjunkta (och begränsade) och $N_k = \#$ händelser i S_k så är

a) $N_1, \dots, N_n$ oberoende s.v.

b) $N_k \sim Poi(\lambda |S_k|)$ där λ är en parameter (intensiteten) och $|S_k|$ är längden/arean/volymen (beroende på om $d = 1, 2, 3$.).

Anm: Används inom astronomi, biologi, geologi, fysik, bildbehandling, telekommunikation etc.

Ex: 1) stjärnors placering i ett begränsat område

2) var träden växer i en skog

3) basstationers placering i en stad

4) kunders ankomsttider till en affär

Tal: Det bor björnar i en skog. Vid varje fix tidpunkt följer placeringen av dessa approximativt en PP med $\lambda = 0.3$ björnar$/(km)^2$.

Vad är sannolikheten att det befinner sig minst en björn inom 2 km avstånd från Jakob?

L: Låt S = disk med radie 2 km centrerad runt Jakob. Om N = # björnar är

$$N \sim Poi(\lambda \cdot |S|) \quad \text{där} \quad |S| = \pi \cdot r^2 = 4\pi$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(N=0) = \frac{(\lambda|S|)^0}{0!} e^{-\lambda|S|} = e^{-\frac{12\pi}{10}}$$

Så att $\mathbb{P}(N \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N=0) = 1 - e^{-\frac{12\pi}{10}}$ //

Flerdim. s.v. kont. fallet

En kont. s.v. $\underline{X} = (\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n) \in \mathbb{R}^n$ definieras av dess gemensamma tfkn:

$$f(s_1, s_2, \dots, s_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$$

och uppfyller att

$$\mathbb{P}(a_1 < \underline{X}_1 < b_1, \dots, a_n < \underline{X}_n < b_n) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(s_1, \dots, s_n)\, ds_n \cdots ds_1$$

$\forall \; a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n.$

$\underline{X}$ kan också det. av sin ffkn

$$F(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}(\underline{X}_1 \le t_1, \dots, \underline{X}_n \le t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f(s_1, \dots, s_n)\, ds_1 \cdots ds_n$$

$\forall \; (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$

<u>Def:</u> $\underline{X} = (\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n)$ är likformigt fördelad på $A \subset \mathbb{R}^n$ s.a. $|A|$ $(= \mathrm{Vol}(A)) < \infty$ om

$$f(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \frac{1}{|A|} & \text{om } (s_1, \dots, s_n) \in A \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

"lika vikt överallt på A"

Om $n = 2$ och $A = [a,b] \times [c,d]$ får vi att

$$f(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)} & a \le s_1 \le b,\ c \le s_2 \le d \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Återigen kallas s.v. X_1, s.v. X_2 etc för marginalerna till X. Vi har att

$$f_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t, s_2, \ldots, s_n)\, ds_n \cdots ds_2$$

är tthn för X_1. Vidare är

$$F_{X_1}(t) = P(X_1 \le t) = \lim_{s_2 \to \infty} \cdots \lim_{s_n \to \infty} F_X(t, s_2, \ldots, s_n)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s_1, s_2, \ldots, s_n)\, ds_n \cdots ds_1$$

Def: (som innan) $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende omm

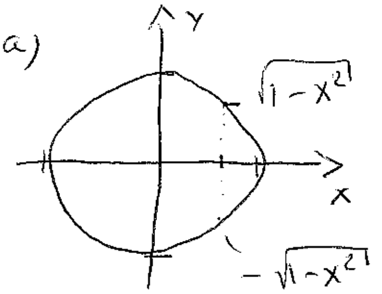
$$F_X(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(t_k) \qquad \forall\ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

Anm: Man kan visa att $X_1, \ldots, X_n$ oberoende är ekvivalent med att

$$f_X(s_1, \ldots, s_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(s_k)$$

<u>Tal:</u> Låt (X, Y) vara likformigt fördelad på $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. a) Hitta marginalfördelningarna för X resp. Y. b) Är de oberoende?

<u>L:</u> a)



Vi har att

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x,y) \in D \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi får då att

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \overset{-1 \leq x \leq 1}{=} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy$$

$$= \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \quad \text{för } -1 \leq x \leq 1$$

p.s.s. får vi $f_Y(y) = \dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$ för $-1 \leq y \leq 1$

Rimligt? Ja, "finns mer y om X nära 0"

b) Intuitivt nej; Om Y nära $1 \Rightarrow X$ nära 0.

Formellt:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} \neq \frac{4}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = f_X(x) f_Y(y)$$

Def: (X,Y) är bivariat normalfördelad

om

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right)$$

Sats: Marginalfördelningarna är $X\sim N(\mu_x,\sigma_x^2)$ och $Y\sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$.

B: Vi har att

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\left\{\begin{array}{l} u=\frac{x-\mu_x}{\sigma} \\ v=\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \quad dy=\sigma_y\,dv\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2+v^2-2\rho uv\right]\right)dv$$

$$=\left\{u^2+v^2-2\rho uv=(v-\rho u)^2+u^2(1-\rho^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}e^{-u^2/2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right)dv}_{=1 \text{ ty integrand är tfkn för } N(\rho u,\,1-\rho^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

$\square$

Indikatorfunktion

$I_A(x)$, $I(x \in A)$ och $\chi_A(x)$ etc är

olika skrivsätt för indikatorfunktioner

Här är (oftast) $A \subset \mathbb{R}^n$ och $x \in \mathbb{R}^n$.

Vi definierar

$$I(x \in A) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in A \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi ser att

$$\mathbb{P}(\underline{X} \in A) = \int_A f_{\underline{X}}(x)\,dx = \int I(x \in A) f_{\underline{X}}(x)\,dx$$

$$= \mathbb{E}\left[I(\underline{X} \in A)\right].$$

Ex: $\underline{X}, \underline{Y}$ är två kont. s.v.

$$\mathbb{P}(\underline{X} \geq \underline{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(x \geq y) f_{\underline{X},\underline{Y}}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty} f_{\underline{X},\underline{Y}}(x,y)\,dx\,dy$$