TMA 321

$\boxed{R3}$ 1

3.11 Låt U_1, U_2, U_3 vara ober. $U[0,1]$.

Vad är sann att $U_1 x^2 + U_2 x + U_3 = 0$

har reella rötter?

L: $U_1 x^2 + U_2 x + U_3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{U_2}{2U_1} \pm \sqrt{\frac{U_2^2}{4U_1^2} - \frac{U_3}{U_1}}$

reella omm $\frac{U_2^2}{4U_1^2} \geq \frac{U_3}{U_1} \iff U_2^2 \geq 4U_1U_3$

Vi söker $\mathbb{P}(U_2 \geq 2\sqrt{U_1 U_3})$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_3})\, f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f(x_1, x_2, x_3) = f_{U_1}(x_1) f_{U_2}(x_2) f_{U_3}(x_3) \\ = 1 \text{ om } (x_1, x_2, x_3) \in [0,1]^3 \end{array} \right\} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 I(x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_3})\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_{\min(1, 2\sqrt{x_1 x_3})}^1 dx_2\, dx_1\, dx_3 = \int_0^1\int_0^1 1 - \min(1, 2\sqrt{x_1 x_3})\, dx_1\, dx_3$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{x_1 x_3} \leq 1 \Rightarrow x_1 x_3 \leq \frac{1}{4} \\ \Rightarrow x_1 \leq \frac{1}{4x_3} \end{array} \right\} = \int_0^1 \int_0^{\min(1, \frac{1}{4x_3})} 1 - 2\sqrt{x_1 x_3}\, dx_1\, dx_3 + 0$$

$$= \int_0^1 \left[x_1 - 2\sqrt{x_3}\, \frac{x_1^{3/2}}{3/2} \right]_0^{\min(1, \frac{1}{4x_3})} dx_3$$

$$= \int_0^1 \min\left(1, \frac{1}{4x_3}\right) - 2\sqrt{x_3}\, \frac{2}{3} \left(\min\left(1, \frac{1}{4x_3}\right)\right)^{3/2} dx_3$$

$$= \int_0^{1/4} 1 - \frac{4}{3}\sqrt{x_3}\, dx_3 + \int_{1/4}^{1} \underbrace{\frac{1}{4x_3} - \frac{4}{3}\sqrt{x_3}\,\frac{1}{8x_3^{3/2}}}_{= \frac{1}{4x_3} - \frac{1}{6x_3} = \frac{1}{12x_3}} dx_3$$

$$= \left[x_3 - \frac{4}{3}\frac{x_3^{3/2}}{3/2} \right]_0^{1/4} + \left[\frac{1}{12}\log x_3 \right]_{1/4}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8} - 0 + 0 - \frac{1}{12}\log\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12}\log 4 = \frac{5}{36} + \frac{\log 2}{6} \quad //$$

"Inte uppenbart!"

$\boxed{3.15}$ Låt (X, Y) ha gemensam ~~s.d.f~~ tfkn

$$f(x,y) = c\sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad x^2+y^2 \le 1$$

a) Hitta c

L:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = c\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$= c\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi c\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$= 2\pi c\left[\frac{-(1-r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 = 2\pi c\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{2\pi} \quad //$$

b) Hitta $P(X^2+Y^2 \le \frac{1}{2})$

L:

$$P(X^2+Y^2 \le \tfrac{1}{2}) = \dots = 3\int_0^{1/\sqrt{2}} r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$= 3\left[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{1/2} = 1-\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3/2} = 1-\frac{\sqrt{27}}{8}$$ //

d) Hitta marginal ~~fkn~~ för X och Y.

1:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x^2+y^2\le 1)\, f(x,y)\, dy$$

$$= c\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy = \left\{ a=\sqrt{1-x^2} \right\} = c\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\, dy$$

$$= ca\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}\, dy = \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{a}=z \\ dy = a\,dz \end{array} \right\} = ca^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-z^2}\, dz$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} z=\sin t & \sqrt{1-z^2}=\cos t \\ dz=\cos t\, dt & \end{array} \right\} = ca^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(t)\, dt = ca^2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{4}(1-x^2) \quad \text{för} \quad -1\le x\le 1$$

p.s.s. $\quad f_Y(y) = \frac{3}{4}(1-y^2) \quad$ för $\quad -1\le y\le 1$

Facit $\frac{3}{2}(1-x^2)$ men $\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}(1-x^2)\,dx = 2$!?

$$\Rightarrow \quad f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{9}{16}(1-x^2)(1-y^2) \ne f_{X,Y}(x,y)$$

så ej ober. //

e) Hitta de bet. ~~stf~~ tthn

$\mathcal{L}$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{3}{2\pi}\sqrt{1-x^2-y^2}}{\frac{3}{4}(1-y^2)} \quad \text{för}$$

$$-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \quad \text{om} \quad -1 \leq y \leq 1$$

och $f_{Y|X}$ fås på s. //

3.23| Låt $N \sim \text{Bin}(m,r)$ och betingat på att $N=n$, låt $X \sim \text{Bin}(n,p)$ (kan skrivas lite slarvigt som $X|N \sim \text{Bin}(N,p)$). Vilken obetingad fördelning har X?

$\mathcal{L}$: Metod 1: Tänka!

Metod 2: Räkna.

Vi har att $\mathbb{P}(N=n) = \binom{m}{n} r^n (1-r)^{m-n}$ $\quad n=0,\dots,m$

och $\mathbb{P}(X=k \mid N=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Vi söker

$\mathbb{P}(X=k)$ $\forall$ k.

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(X=k, N=n) = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(X=k \mid N=n)\,\mathbb{P}(N=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{m} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{m}{n} r^n (1-r)^{m-n}$$

$$= \sum_{n=k}^{m} \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{m!}{\cancel{n!}(m-n)!} r^n (1-r)^{m-n}$$

$$= \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{n=k}^{m} \frac{(m-k)!}{(n-k)!(m-n)!} p^k (1-p)^{n-k} r^n (1-r)^{m-n}$$

$$= \binom{m}{k} (rp)^k \sum_{n=k}^{m} \frac{(m-k)!}{(n-k)!(m-n)!} ((1-p)r)^{n-k} (1-r)^{m-n}$$

$$= \binom{m}{k} (rp)^k \sum_{n=0}^{m-k} \frac{(m-k)!}{n!(m-k-n)!} ((1-p)r)^{n} (1-r)^{m-n-k}$$

$$= \binom{m}{k} (rp)^k \sum_{n=0}^{m-k} \binom{m-k}{n} ((1-p)r)^{n} (1-r)^{m-n-k}$$

$$= \binom{m}{k} (rp)^k \left((1-p)r + (1-r) \right)^{m-k}$$

$$= \binom{m}{k} (rp)^k (1-pr)^{m-k} \Rightarrow \underline{X} \sim Bin(m, rp) \;//$$

<u>Tänka:</u>

Exp. #	1	2	3	4	....	m-1	m
N:	✓	✓	×	✓		✓	×
$\underline{X}$:	✓	✗		✓		✗	
sann:	rp	1-rp	1-rp	rp			

$\underline{X}$ = de experiment som lyckas i båda stegen

TMA 321

Sann. att ett exp lyckas i båda stegen är rp $\Rightarrow$ $X \sim Bin(m, rp)$ //

$\boxed{R3}$ 6

B.25 Låt X vara en kont. s.v. och låt $Y = WX$ är $W \in \{-1, 1\}$ med sann $\frac{1}{2}$ vardera och W, X är ober. Visa att $f_Y(y)$ är symm. kring $y=0$.

L:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(WX \le y)$$

$$= \mathbb{P}(WX \le y \mid W=1) \cdot \mathbb{P}(W=1) + \mathbb{P}(WX \le y \mid W=-1)\,\mathbb{P}(W=-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X \le y) + \mathbb{P}(X \ge -y)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(F_X(y) + 1 - F_X(-y)\right)$$

$$\Rightarrow \quad f_Y(y) = \frac{1}{2}\left(F_X'(y) - F_X'(-y)\right) = \frac{1}{2}\left(f_X(y) + f_X(-y)\right)$$

$$\Rightarrow \quad f_Y(-y) = \frac{1}{2}\left(f_X(-y) + f_X(y)\right) = f_Y(y) \quad \square$$