TMA 321

$\boxed{F10}$ 1

Betingade fördelningar

Vi definierar den betingade (fördelningen) ~~tfkn~~ för X givet Y ($Y=y$!?) genom

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{om} \quad f_Y(y) > 0,$$

och låter $f_{X|Y}(x|y) = 0$ om $f_Y(y) = 0$.

Anm: Detta smakar som att vi betingar på händelsen $Y=y$ som har sann. 0.

Det gör vi inte då det är en definition.

Man tenderar dock att slarva och efterfråga den betingade tfkn för X givet $Y=y$.

Tal: Bestäm $f_{Y|X}(y|x)$ om (X,Y) är som i vårt föregående tal. Tolka fördelningen.

L: Vi har att

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1/\pi}{2\sqrt{1-x^2}/\pi} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

för $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ om $-1 \leq x \leq 1$.

Vi ser att den betingade fördelningen för Y givet $X=x$ är likformig på intervallet $[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$. //

Tal: Med (X,Y) som förut, bestäm $\mathbb{P}(X+Y\le 1)$.

L: Vi har att

$$\mathbb{P}(X+Y\le 1) = \iint I(x+y\le 1)\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D I(x+y\le 1)\,\frac{1}{\pi}\,dx\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} I(x\le 1-y)\,dx\,dy$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1-y^2=(1-y)(1+y)\ge(1-y)^2 \\ \text{omm} \quad 0\le y\le 1 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} dx\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} 2\sqrt{1-y^2}\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} 1-y+\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\frac{2+\pi}{4} = \frac{2+3\pi}{4\pi} \quad //$$

Hoppa till $\boxed{F10}$ (6)

Kovarians och korrelation

Def: Kovariansen av s.v. X, Y definieras som

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\big[(X - E[X])(Y - E[Y])\big].$$

Korrelationskoefficienten $\rho(X,Y)$ definieras som

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}$$

Anm: 1) ρ är dimensionslös (normerad)

2) Om X, Y är oberoende gäller att

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\big[(X - E[X])(Y - E[Y])\big] = E\big[X - E[X]\big]\,E\big[Y - E[Y]\big] = 0.$$

D.v.s. $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ och $\rho(X,Y) = 0$.

Naturlig fråga: Om $Cov(X,Y)=0$ är X,Y oberoende? Nej!

Ex: Låt $X \sim N(0,1)$ och $W \in \{-1,1\}$ med slh $\frac{1}{2}$ vardera. Låt också X, W vara oberoende och sätt $Y = W \cdot X$.

Vi har att $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

$= \begin{cases} \mathbb{E}[X]=0 \quad \mathbb{E}[Y]=? \quad Y \text{ symm. så } \mathbb{E}[Y]=0 \\ \text{egentligen: } \mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[WX]=\mathbb{E}[X \mid W=1]\,\mathbb{P}(W=1)+\cancel{\mathbb{E}[-X \mid W=-1]}\,\mathbb{P}(W=-1)=0 \end{cases}$

$\underset{\text{ober}}{=} \mathbb{E}[W]\,\mathbb{E}[X]=0$

$= \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[WX^2] = \mathbb{E}[W]\,\mathbb{E}[X^2] = 0$ //

Är X,Y oberoende? Vi har att $|X|=|Y|$ s.a.

$$\mathbb{P}(|X|>1, |Y|<1) = 0 \neq \mathbb{P}(|X|>1)\,\mathbb{P}(|Y|<1).$$

Anm: 1) För att detta skall vara helt ok måste vi förstå $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X \mid W=1]\,\mathbb{P}(W=1) + \cdots$ kommer nästa gång!

2) oberoende: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(x\in A, y \in B)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(x\in A)\, I(y\in B)\, f_X(x)\, f_Y(x)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} I(x \in A) f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} I(y \in B) f_Y(y)\, dy$$

$$= \mathbb{P}(X \in A)\, \mathbb{P}(Y \in B) \qquad \forall\ A, B$$

Sats: För två s.v. X, Y gäller

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

B: $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y-\mathbb{E}[X+Y])^2]$

$$= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2 + (Y-\mathbb{E}[Y])^2 + 2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right]$$

$$= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \qquad \text{B}$$

Anm: Om X, Y oberoende $\Rightarrow$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

Sats: i) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$

ii) $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Cov}(aX,Y) = a\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

iii) $\mathrm{Cov}(X+Y,Z) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Z)$

iv) $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$

v) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$

Vi kan nu utöka definitionerna av väntevärden:

1)
$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

om (X,Y) kont. s.v.

2)
$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_{x_i}\sum_{y_j} g(x_i,y_j)\,\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$

om (X,Y) är diskreta s.v.

<u>Sats:</u> Om X, Y är oberoende gäller att

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\,\mathbb{E}[h(Y)] \quad \forall\ g,h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

<u>B:</u> 1) (X,Y) kont:

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y) f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_Y(y)\,dy = \mathbb{E}[g(X)]\,\mathbb{E}[h(Y)]$$

2) (X,Y) diskreta övning $\square$

B: i) - iv) övning

v)

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

$$= \mathbb{E}[XY - \mathbb{E}[X]Y - X\,\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]]$$

$$= \mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]\,(-1 - 1 + 1)$$

$$= \mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$$

Var i tas!