TMA 321 $\boxed{F11}$ (1)

Kom ihåg: $\operatorname{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$

och
$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}$$

<u>Sats:</u> $-1 \le \rho \le 1$

<u>B:</u> $\ulcorner \operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y)$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(X-Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(-Y) + 2\operatorname{Cov}(X,-Y)$$
$$= \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) - 2\operatorname{Cov}(X,Y)$$

<u>OBS:</u> Om X, Y ober $\Rightarrow$ $\operatorname{Var}(X-Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$ $\lrcorner$

Låt $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$ $\sigma_Y = \sqrt{\operatorname{Var}(Y)}$ "standardavvikelser"

Vi har

$$0 \le \operatorname{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X}\right) + \operatorname{Var}\left(\frac{Y}{\sigma_Y}\right) - 2\operatorname{Cov}\left(\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{Var}(X)}{\sigma_X^2} + \frac{\operatorname{Var}(Y)}{\sigma_Y^2} - \frac{2\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$= 1 + 1 - 2\rho = 2(1-\rho) \Rightarrow \rho \le 1$$

p.s.s.

$$0 \le \operatorname{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = 2(1+\rho) \Rightarrow \rho \ge -1 \quad \square$$

<u>Betingade väntevärden</u>

<u>Def:</u> Det betingade väntevärdet av X givet $Y = y$ ges av

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

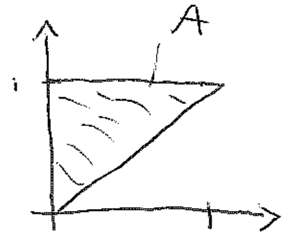
om (X,Y) är kont. och

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \sum_{x_j} x_j \, p_{X|Y}(x_j | y)$$

i det diskreta.

Tal: Låt (X,Y) vara likformigt fördelade på $A = \{0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$.

Bestäm $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ $\forall\ y \in [0,1]$.



L: Då $|A| = \text{Area}(A) = \frac{1}{2}$ är $f_{X,Y}(x,y) = 2$ $\forall\ (x,y) \in A$

$$\Rightarrow \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y 2\,dx = 2y \qquad 0 \le y \le 1.$$

Därför blir

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y} \qquad 0 \le y \le 1 \text{ och } 0 \le x \le y.$$

Vi får att

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^y \frac{x}{y}\,dx = \frac{1}{y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y = \frac{y}{2}$$

om $0 \le y \le 1$ (och $\mathbb{E}[X \mid Y = y] = 0$ annars). //

missvisande? om $y \notin [0,1]$ borde detta ens vara def?

OBS: $\mathbb{E}[X \mid Y]$ är den funktion av s.v. Y som antar värdet $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ om $Y = y$.

Då $\mathbb{E}[X \mid Y]$ är en fkn av Y är även $\mathbb{E}[X \mid Y]$ en s.v.

Sats: Vi har att $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid Y]\big] = \mathbb{E}[X]$

B: (kont fallet) Vi har att

$$\mathbb{E}[h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_Y(y)\,dy \quad \text{så}$$

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid Y]\big] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[X \mid Y = y]\, f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X \mid Y}(x \mid y)\,dx\, f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \mathbb{E}[X] \,/\!/$$

Anm: 1) Satsen kallas ibland LTE = Law of Total Expectation

2) Vårt tal ger

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid Y = y]\big] = \int_0^1 \frac{y}{2}\, 2y\,dy = \frac{1}{3} \,/\!/$$

3/ I detta fall är $\mathbb{E}[X \mid Y] = \frac{Y}{2}$

Olikheter

Sats: För alla s.v. X och $a>0$ gäller att

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a} \qquad \text{Markov's olikhet}$$

B: Vi har att (med X kont)

$$\mathbb{E}[|X|] \geq \mathbb{E}[I(|X| \geq a)\,|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, I(|x| \geq a) f_X(x)\,dx$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\infty} a\, I(|x| \geq a) f_X(x)\,dx = a \int_{a}^{\infty} f_X(x)\,dx + a \int_{-\infty}^{-a} f_X(x)\,dx$$

$$= a\left(\mathbb{P}(X > a) + \mathbb{P}(X < -a)\right) = a\, \mathbb{P}(|X| > a).$$

Om X är diskret är beviset analogt. $\square$

Sats: Låt X vara en s.v. med $\mathrm{Var}(X) < \infty$. Vi har att för alla $a>0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}. \qquad \text{Chebyshev's olikhet}$$

B: Vi har att

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq a^2)$$

$$\underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}. \quad \square$$

Tal: Låt $X \sim Bin(n, \frac{1}{4})$. Hitta övre begränsningar till $\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2})$ mha

a) Markov

b) Chebyshev

L: a)

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{n/2} = \frac{n/4}{n/2} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) = \mathbb{P}(X - \frac{n}{4} \geq \frac{n}{4}) \leq \mathbb{P}(|X - \frac{n}{4}| \geq \frac{n}{4})$$

$$\leq \frac{Var(X)}{n^2/16} = \frac{n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{n^2/16} = \frac{3}{n}$$

Anm: $\frac{3}{n} << \frac{1}{2}$ om n stort, men i själva verket kan vi göra mkt bättre.

Def: En sekvens av s.v. $X_1, X_2, \ldots$ som är <u>oberoende och likafördelade</u> kallas för en i.i.d. (independent, identically distributed) sekvens.

Tag en i.i.d. sekvens $X_1, X_2, \ldots$ med $\mu = \mathbb{E}[X_k]$ och $\sigma^2 = Var(X_k) < \infty$. Bilda <u>medelvärdet</u> av de n första:

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Vad tror ni om $\overline{X}_n$?

Sats (Stora Talens Lag STL, LLN):

Låt $X_1, \dots$ vara en iid sekvens med $\mu = \mathbb{E}[X_k]$ och $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_k) < \infty$.
För varje $\varepsilon > 0$ gäller att

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

B: Observera att $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right]$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu.$$

Vi får att

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]| > \varepsilon) \le \frac{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \underset{\text{ober.}}{=} \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k)$$

$$= \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2} \longrightarrow 0 \quad \text{då } n \to \infty. \quad \square$$

Ex (Monte-Carlo simulering):

Låt $X_1, X_2, \dots$ vara i.i.d. $U[0,1]$. Vi har att

$$\mathbb{E}[e^{X_1^2}] = \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Låt $Y_k = e^{X_k^2}$. STL ger att

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{X_k^2} \longrightarrow \mathbb{E}[Y_1] = \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Så om vi simulerar $X_1, \dots, X_{10000}$ så är

$$\frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{10000} e^{X_k^2} \approx \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Def: Vi säger att sekvensen $X_1, X_2, \ldots$ konvergerar mot X i sannolikhet ($X_n \xrightarrow{P} X$) om $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

Var i fas!