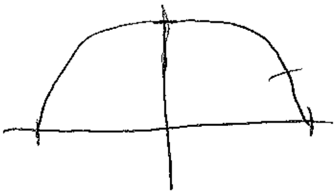
3.9 Låt (X, Y) vara likformigt fördelade på $0 \leq y \leq 1-x^2$ och $-1 \leq x \leq 1$.

a) Hitta marginal-tfkn för X, Y.

b) Hitta de betingade fördelningarna.

1:



$$Vol(A) = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

a)

Vi får att $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$

$$= \int_0^{1-x^2} \frac{3}{4}\,dy = \frac{3}{4}(1-x^2) \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y \leq 1-x^2 \Rightarrow x^2 \leq 1-y \\ \Rightarrow -\sqrt{1-y} \leq x \leq \sqrt{1-y} \end{array} \right\}$$

$$= \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{1-y} \qquad 0 \leq y \leq 1$$

b)

Vi får att

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{3/4}{3/2\sqrt{1-y}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y}}$$

för $(x,y) \in A$

och

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{3/4}{3/4(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{för } (x,y) \in A.$$

4.46 Låt U, V vara oberoende med

$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[V] = \mu$ och $Var(U) = Var(V) = \sigma^2$.

Låt $Z = \alpha U + \sqrt{1-\alpha^2}\, V$. Bestäm $\mathbb{E}[Z]$

och ρ_{UZ}

1: Vi har att $\mathbb{E}[Z] = \alpha\, \mathbb{E}[U] + \sqrt{1-\alpha^2}\, \mathbb{E}[V]$

$$= \alpha \mu + \sqrt{1-\alpha^2}\, \mu.$$

Vidare är

$$\rho_{UZ} = \frac{Cov(U,Z)}{\sqrt{Var(U)\, Var(Z)}}.$$

$$Var(Z) = Var(\alpha U + \sqrt{1-\alpha^2}\, V) = \alpha^2 Var(U) + (1-\alpha^2) Var(V)$$
$$= \alpha^2 \sigma^2 + (1-\alpha^2)\sigma^2 = \sigma^2$$

$$Cov(U,Z) = \mathbb{E}[(U - \mathbb{E}[U])(Z - \mathbb{E}[Z])]$$

$$= \mathbb{E}[(U-\mu)(\alpha U + \sqrt{1-\alpha^2}\, V - \alpha\mu - \sqrt{1-\alpha^2}\,\mu)]$$

$$= \mathbb{E}[(U-\mu)(\alpha U - \alpha\mu + \sqrt{1-\alpha^2}(V-\mu))]$$

$$= \mathbb{E}[\alpha(U-\mu)^2 + (U-\mu)\sqrt{1-\alpha^2}(V-\mu)]$$

$$= \alpha\, Var(U) + \mathbb{E}[U-\mu]\, \mathbb{E}[\sqrt{1-\alpha^2}(V-\mu)]$$

$$= \alpha \sigma^2 //$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{UZ} = \frac{\alpha\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 \sigma^2}} = \alpha //$$

4,67) En slumpmässig rektangel har basen $X \sim U[0,1]$. Givet basen är höjden $U[0,X]$. Vad är den förväntade arean och omkretsen?

L: Låt H = höjden. Arean $= XH$ och omkretsen $= 2X + 2H$.

Lagen om totalt väntevärde: $E[Y] = E[E[Y|X]]$.

Vi får att $E[XH] = E[E[XH|X]]$

$$E[XH|X=x] = E[xH|X=x] = x\,E[H|X=x]$$

$$= x\int_{-\infty}^{\infty} h\, f_{H|X}(h|x)\,dh = x\int_0^x h\,\frac{1}{x}\,dh = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E[XH|X] = \frac{X^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E[XH] = E[E[XH|X]] = E\left[\frac{X^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{6}$$

Vidare är $E[H] = E[E[H|X]] = E\left[\frac{X}{2}\right] = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad E[2X + 2H] = 2E[X] + 2E[H] = 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

4.88 Låt $X \sim N(0,\sigma^2)$ och använd mgf för att visa att $E[X^{2n+1}]=0 \ \forall n$ och att $E[X^{2n}] = \frac{(2n)!\,\sigma^{2n}}{2^n\, n!}$

B: Hitta mgf: $M_Z(t) = e^{t^2/2}$ och $M_{\sigma Z}(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

och $X = \sigma Z$ så $M_X(t) = e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}$ //

Vi har att $M_X^{(k)}(t) = E[X^k]$.

Metod 1: Derivera som en galning:

$M_X'(t) = \sigma^2 t e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \qquad M_X'(0)=0$

$M_X''(t) = \sigma^2 e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}} + \sigma^4 t^2 e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}} \Rightarrow M_X''(0) = \sigma^2$

$M_X'''(t) = \sigma^4 t e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}} + 2\sigma^4 t e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}} + \sigma^6 t^3 e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}} \Rightarrow M_X'''(0) = 0$

$\vdots$

Metod 2: Taylor! $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$

Vi får att

$$M_X(t) = e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}} = 1 + \frac{\sigma^2t^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)^n + \dots$$

$$= 1 + 0\cdot t + \frac{t^2}{2}\cdot\sigma^2 + 0\cdot t^3 + \frac{t^4}{4!}\cdot\frac{4!\,\sigma^4}{2!\,2^2} + 0t^5 + \dots + \frac{t^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{(2n)!\,\sigma^{2n}}{n!\,2^n} + \dots$$

TMA 321

$\boxed{R4}$ 5

Men, då

$$M_{\underline{X}}(t) = M_{\underline{X}}(0) + M'_{\underline{X}}(0)\,t + M''_{\underline{X}}(0)\frac{t^2}{2} + \dots + M^{(k)}_{\underline{X}}(0)\frac{t^k}{k!} + \dots$$

Så ser vi att $M^{(2n+1)}_{\underline{X}}(0) = 0$ och

$$M^{(2n)}_{\underline{X}}(0) = \frac{(2n)!\,\sigma^{2n}}{n!\;2^n}$$

□